新・フーリエ解析と関数解析学

新井仁之著

培風館

はじめに

本書は，拙著 数学レクチャーノート［基礎編 1］『フーリエ解析と関数解析学』(2001) を大幅に加筆・改訂したものである．基本的には前掲書と同じストーリーを踏襲し，フーリエ解析の初歩からはじめ，関数解析学の入り口までを案内するものである．フーリエ級数，フーリエ変換，緩増加超関数，直交多項式，ウェーブレット，ヒルベルト空間上の線形作用素，ソボレフ空間，非有界な自己共役作用素のスペクトル理論などを本書で学ぶことができる．

今回の改訂新版にあたっては，特にフーリエ級数，フーリエ変換，ウェーブレット，ソボレフ空間に関する部分を中心に加筆を施した．また，いくつかの定理については証明をより丁寧なものに変えた．フーリエ解析を深く学んでいくためにはルベーグ積分が必要になるため，フーリエ解析で使われるルベーグ積分に関する諸定理を紹介する節 (1.6 節) も新たに設けた．フーリエ変換の留数定理を用いた具体的な計算法 (3.6 節)，熱核の基礎事項などに関する節 (3.4.5 項) も追加した．また，ウェーブレットに関する部分 (7.3 節) は，ハール・ウェーブレットという具体例を中心にして，理解しやすいように全面改訂している．バナッハ空間上の線形作用素とそのフーリエ解析への応用に関する章 (14 章) も新たに加わえた．

なお，著者のホーム・ページ

`http://www4.ocn.ne.jp/~arai/`

に本書の更新情報を随時公開していくので，ご覧いただきたい．

謝辞　今回の改訂に際しては，培風館の岩田誠司氏にはいろいろお世話いただき，感謝する次第である．

2010 年 4 月

新 井 仁 之

旧版まえがき

フーリエ解析と関数解析は，今日では数学のみならず情報理論や物理学など数理科学の多くの分野で利用され，重要な役割をはたしている．本書は，読者をフーリエ解析と関数解析の入口まで案内するガイドブックである．内容は，フーリエ解析の初歩からはじめ，以下の話題の基礎を系統的に学べるように構成してある:

緩増加超関数，直交多項式，ウェーブレット，ヒルベルト空間上の
線形作用素 (特に非有界作用素)，ソボレフ空間，スペクトル分解，
簡単な発展方程式，フレーム理論．

ところで，これらの話題は現在の大学のカリキュラムでは時間の都合上往々にして省略されるか，必要になった時点で簡単に解説されるだけということが多い．しかし，これらは

超関数
↙↗
フーリエ解析 ⟶ **直交関数系** ⟶ **スペクトル分解**
↘
ウェーブレット

という数学の流れの中で発展してきたもので，必要になったら学ぶという泥縄式学習法よりは，この流れに沿って一気に勉強したほうが能率的でしかも深く理解できると考えられる．本書は，このような考えに基づいて書かれている．

なお本書では，フーリエ解析の一般論と関数解析の抽象的な理論を解説すると同時に，具体的な応用例を学ぶため，サンプリング定理とクーロンポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式を題材にとり上げた．その理由は，サンプリング定理とシュレーディンガー方程式は，それぞれ情報理論と量子力学の数学というフーリエ解析と関数解析に関連の深い分野の基本的なトピックスのひとつだからである．

本書の読み方であるが，目次を見ると難しいという印象を受ける読者もいるかもしれないが，定理の証明やその背景の説明，応用の仕方をできるだけ丁寧

に解説してあるので，最初から順に読んでもらえれば無理なく理解できるはずである．予備知識としては，微分積分と線形代数を仮定している．またルベーグ積分もフーリエ解析と関数解析を展開するのに必要なため使われている．しかし，ルベーグ積分固有の定理や議論を使うときは，それが伊藤清三「ルベーグ積分入門」(裳華房) のどこに書かれているかを指摘してあるので (該当箇所はルベーグ積分の他の本でも学べるであろう)，ルベーグ積分を知らない読者でもルベーグ積分の入門書を片手に本書を読んでいけば理解できるようになっている．

最後になるが，本書にはバナッハ空間に関する記述がほとんどない．バナッハ空間に関する関数解析については，多くの関数解析の教科書に解説されているので，そういった本で学んでおくことをお勧めする．また,「入口までのガイドブック」という性格上，その他にもとり上げなかったテーマ，深く立ち入った解説をしなかった部分もある．より詳しくフーリエ解析，関数解析を知りたくなった読者は，ぜひ関連の専門書を参照してほしい．著者のホーム・ページ `http://www4.ocn.ne.jp/~arai/` にも関連した話題を随時公開していく予定である．なおタイトル「フーリエ解析と関数解析学」は，本シリーズの編者より執筆依頼時に与えられたものである．

謝辞　本書の執筆を勧めていただいた砂田利一先生にこの場を借りて厚く御礼申し上げたい．また，培風館の松本和宣氏と，とりわけ岩田誠司氏にはいろいろお世話いただき，感謝する次第である．新井しのぶ氏には，わかりにくい部分を指摘してもらい，また図の作成および原稿の TEX 入力をしてもらった．感謝したい．図の作成には，Mathematica® 3.0, MapleV®, MATLAB®, Adobe Illustrator® を使った．

2001 年 6 月

新 井 仁 之

第 3 刷への追記：　数名の方々，とりわけ金子誠氏，藪田公三氏，落合啓之氏，梶大介氏から初刷，第 2 刷の誤りとミスプリントの指摘及び貴重なコメントをいただきました．感謝いたします．なお前刷の定理 4.9 の証明の不備な点が修正されてますが，それは藪田氏によります．

目　次

Part I　フーリエ解析学

Part III　フーリエ解析から関数解析へ

Part I

フーリエ解析学

本書のテーマは，フーリエ解析学と関数解析学である．この二つは，現代の数学，物理学，工学などを学ぶうえで身に付けておきたい数学的素養である．まずフーリエ解析学からはじめる．読者はこの PART I でフーリエ解析学の考え方と方法を習得できるであろう．なお，本書をとおして

$$\mathbf{Z} = \{\text{ 整数全体 }\},$$
$$\mathbf{R} = \{\text{ 実数全体 }\},$$
$$\mathbf{C} = \{\text{ 複素数全体 }\},$$
$$i = \sqrt{-1}\ (\text{虚数})$$

を表すものとする．また，関数は特に断らない限り複素数値関数を意味するものとする．

1章

フーリエ級数

これから学んでいくフーリエ解析は，フランスの数学者 J. B. J. Fourier (1768–1830) が考案したフーリエ級数とフーリエ積分を基礎にして発展した数学の一分野である．フーリエ級数，フーリエ積分はもともと Fourier が熱伝導の数学的な研究をするために考案したものであった．しかしその後，熱伝導の研究とはほとんど独立に多くの数学者により研究が進められ，また同時に物理学者，工学者，技術者などによりさまざまな分野へ応用もされていった．フーリエ解析は現在，数学はもちろんのこと，その他の数理科学の諸分野でも必要不可欠の数学として使われている．

フーリエ級数，フーリエ積分が有用であることは，本書を通して解説していくことになるが，まずはフーリエ級数とはどのようなものであるかをみていくことにしよう．Fourier は，次のようなことを主張した[1)]．

「周期 2ℓ の任意の関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) \qquad (x \in [-\ell, \ell]) \tag{1.1}$$

のように三角関数の和で表すことができ，その係数 a_k, b_k は

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos k\omega t\,dt, \qquad b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin k\omega t\,dt \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{\ell}\right)$$

によって求められる．なお $\mathbf{R}$ 上の関数 f が**周期** T **の関数**であるとは，$f(x+T) = f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ を満たすことである．」

Fourier はこの主張が正しいと確信しており，正しさを保証するいくつかの例を示し，また証明らしきものも発表した．しかし，それは数学的に完全なものとはいえなかった．そのため，彼の論文に対していろいろな批判が当時の数学者のあいだからおこった．

今日では，たとえば，連続関数でさえある点でフーリエ級数展開できないことなどが証明されている．しかし，それにもかかわらず Fourier の考えは捨て去られることはなく，むしろ数学の幅広い分野で，有用な道具のひとつとして使われている．その理由は，“任意の関数” に対してではなくとも，かなり多くの関数が (1.1) のよ

[1)] 1805 年に Fourier は，草稿において「任意の不連続な関数さえ，サインまたはコサインの項からなる級数に展開できる」と主張していた ([GrG] 参照)．

うに級数展開できるからである.

本章では，どのような関数に対して，(1.1) の展開が可能かを述べていきたい．なお，級数 (1.1) の右辺を f の**フーリエ級数**といい，(1.1) が x で成り立つとき，f は x で**フーリエ級数展開可能**であるという．a_k, b_k をその**フーリエ係数**という．なお，フーリエ級数が，熱方程式を解くことからどのように導出されるかについては，第 2 章で述べる.

1.1 フーリエ級数の例

はじめに具体的な関数のフーリエ級数を計算してみよう.

まず $[-\pi, \pi)$ 上では x^2 であるような周期 2π の関数 $f(x)$ を考えてみる.

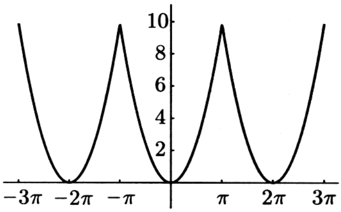


図 1.1

この関数のフーリエ係数のうち b_k のほうは

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin kt\, dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

であるから $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ である．また，a_k については次のようになることが計算することで容易に確かめられる:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos kt\, dt = \frac{4(-1)^k}{k^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

したがって，$f(x)$ のフーリエ級数は，

$$\frac{1}{3}\pi^2 - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x + \cdots$$

である．さて，$f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos kx$ とおく．証明はあとの節で行うが，とも

かく Fourier によれば

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} f_N(x)$$

となっているはずである．そこで $f(x)$ と $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_5(x)$ のグラフをコンピュータで描いたものを見比べてみよう．

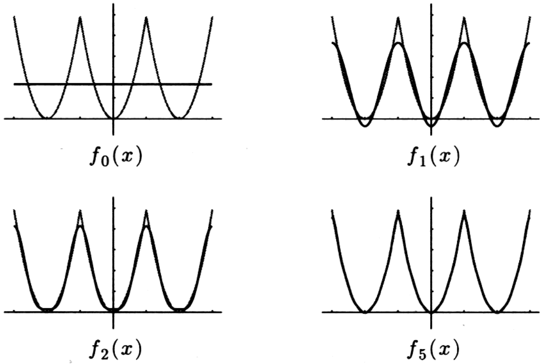


図 1.2

フーリエ級数がたしかにもとの関数に近づいていることがわかるであろう．次に，もう少し複雑な関数についても調べてみよう．たとえば，

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 4\pi & (-\pi \leqq x < -\frac{3\pi}{4}) \\ -3x - \frac{5\pi}{4} & (-\frac{3\pi}{4} \leqq x < -\frac{\pi}{2}) \\ -\frac{x^2}{10} + \frac{\pi^2}{40} + \frac{\pi}{4} & (-\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{\pi}{2}) \\ 2x - \frac{3\pi}{4} & (\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{3\pi}{4}) \\ 3(-x + \pi) & (\frac{3\pi}{4} \leqq x < \pi) \end{cases}$$

なる関数を考える．この関数のグラフは図 1.3 である．フーリエ級数を計算し

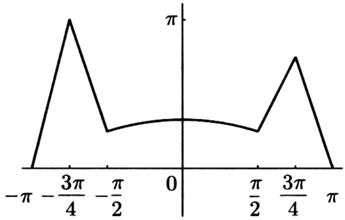


図 1.3

てグラフを描いてみる．記号を簡単にするため

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right)$$

とおく．このとき，たとえば $f_5(x)$ は次のようになる[2]：

$$\begin{aligned} f_5(x) = &\frac{1}{2}\frac{3/4\pi^2 + \pi^3/60}{\pi} - \frac{1}{5}\frac{\left(-37 + 30\sqrt{2}\right)\cos x}{\pi} + \frac{\left(-\sqrt{2}+1\right)\sin x}{\pi} \\ &- \frac{1}{20}\frac{(10-\pi)\cos 2x}{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\pi} \\ &+ \frac{1}{135}\frac{\left(103 + 90\sqrt{2}\right)\cos 3x}{\pi} + \frac{1}{9}\frac{\left(-\sqrt{2}-1\right)\sin(3x)}{\pi} \\ &- \frac{1}{80}\frac{(\pi+120)\cos 4x}{\pi} \\ &- \frac{1}{625}\frac{\left(-177 - 150\sqrt{2}\right)\cos 5x}{\pi} + \frac{1}{25}\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\sin 5x}{\pi}. \end{aligned}$$

$f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ を順にグラフにしてみると，次第に $f(x)$ のグラフの形に近づいていくことがわかる (図 1.4 参照).

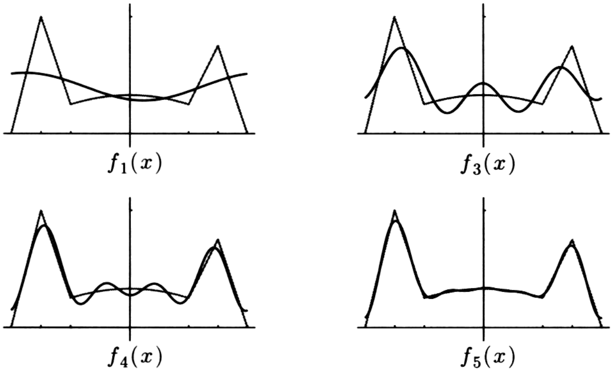
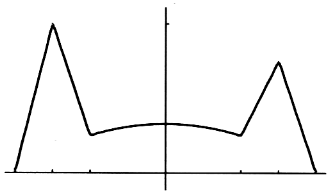


図 1.4

ここで $f_5(x)$ ともとの $f(x)$ のグラフをみると，それでもまだ三角形の頂点の部分で誤差が残っているのがはっきりとわかる．しかし，もっとフーリエ級数展開して $f_{30}(x)$ まで求めそのグラフを描くと，図 1.5 のように三角形の頂点の部分もかなり近似されていることがわかる．この他にも多くの例を考え，その

[2] 以下の計算には数式処理ソフト Maple V® を使った (読者は特に計算を確認する必要はない. むしろ図 1.4 のグラフの様子に注意してほしい.)



$f_{30}(x)$

図 1.5

フーリエ級数を有限項計算し，コンピュータを利用してそのグラフを描くことにより，近似の様子をみることができる．しかしここではこれ以上具体的な計算を続けることはせず，一般の関数に対して N を大きくしていったとき，$f_N(x)$ が $f(x)$ に近づいていくことを数学的に証明する．そのための準備からはじめよう．

1.2 複素形フーリエ級数とコサイン形フーリエ級数

Fourier の主張が多くの関数に対して正しいことを証明するため，本節ではフーリエ級数をもう少し計算しやすい形に変形する．実際，フーリエ級数は (1.1) の形のままであると，一つの級数の中にサインとコサインの両方が含まれていて，計算するときに同様のことを二度繰り返さなければならず，面倒なことが多い．そこで，フーリエ級数を一つの関数を基礎にして書き表す方法を学ぶ．この方法には，指数関数 $e^{i\theta}$ のみを使ってフーリエ級数を記す方法と，コサイン関数だけあるいはサイン関数のみを使う方法がある．前者はフーリエ解析に複素解析をとり込めるという利点があり，後者は，応用数学でしばしば使われる．

1.2.1 複素フーリエ級数

まず，指数関数を使った変形からはじめる．**本書では，虚数 $\sqrt{-1}$ を i により表す．** 変形の基本は，次のオイラーの公式である:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \textbf{(オイラーの公式)}. \tag{1.2}$$

いま $\ell > 0$ とし，

$$\omega = \frac{\pi}{\ell} \tag{1.3}$$

とおく．$\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数 $f(x)$ が $[-\ell, \ell)$ 上で積分可能 (以下，ルベーグ

積分可能であることを単に積分可能，あるいは可積分という）であるとき，

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)e^{-ik\omega t}dt \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

と定義する．$k \geqq 1$ のとき，(1.1) の a_k, b_k に対して，

$$c_k = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\left(\cos k\omega t - i\sin k\omega t\right)dt = \frac{1}{2}\left(a_k - ib_k\right)$$

である．また

$$c_{-k} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\left(\cos k\omega t + i\sin k\omega t\right)dt = \frac{1}{2}\left(a_k + ib_k\right)$$

である．したがって

$$a_k = c_k + c_{-k},$$
$$b_k = i\left(c_k - c_{-k}\right)$$

となっている．また定義から

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

である．以上より

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\right)\\
&\quad = c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left\{\left(c_k + c_{-k}\right)\cos k\omega x + i\left(c_k - c_{-k}\right)\sin k\omega x\right\}\\
&\quad = c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left\{c_k\left(\cos k\omega x + i\sin k\omega x\right) + c_{-k}\left(\cos k\omega x - i\sin k\omega x\right)\right\}\\
&\quad = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega x}
\end{aligned}$$

が得られる．このことから Fourier の主張は

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega x}$$

が成り立つことである，といい換えることができる．この式の右辺を f の**複素フーリエ級数**といい，c_k を f の**第 k 複素フーリエ係数**という．また，右辺の有限和の部分を $s_N[f](x)$ とおき，f の**第 N フーリエ部分和**という．すなわち

$$s_N[f](x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega x}$$

である．これはもとの三角関数の形で表せば

$$s_N[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

となる．

なお，第 k 複素フーリエ係数 c_k は，これが関数 f に関するものであることを明記したいときには，$c_k(f)$ と表すことにする．

フーリエ係数の計算に役立つ基本的な公式を証明しておく．

命題 1.1 (1) $\displaystyle \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{ik\omega x}dx = \begin{cases} 0 & (k = \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ 1 & (k = 0). \end{cases}$

(2) m, n を非負の整数とするとき，次が成り立つ:

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \cos n\omega x \cos m\omega x\, dx = \begin{cases} 2 & (n = m = 0) \\ 1 & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases},$$

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \sin n\omega x \sin m\omega x\, dx = \begin{cases} 0 & (n = m = 0) \\ 1 & (n = m \neq 0) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases},$$

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \cos n\omega xt \sin m\omega x\, dx = 0.$$

証明 (1) $k = 0$ の場合は明らかであるから，それ以外の場合を示す．$y = \omega x$ で変数変換すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{ik\omega x}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iky}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ky\, dy + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin ky\, dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

(2) 三角関数の加法定理を用いて直接計算できるが，ここでは $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$, $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ と (1) を用いて示す．

$$\begin{aligned}\cos n\omega x \cos m\omega x &= \frac{1}{4}\left(e^{in\omega x} + e^{-inx}\right)\left(e^{im\omega x} + e^{-imx}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(n+m)\omega x} + e^{i(n-m)\omega x} + e^{i(-n+m)\omega x} + e^{-i(n+m)\omega x}\right)\end{aligned}$$

である．したがって $n = m \neq 0$ の場合，

$$\cos n\omega x \cos m\omega x = \frac{1}{4}\left(e^{2in\omega x} + 2 + e^{-2in\omega x}\right)$$

である．ゆえに，(1) より求める結果が容易に導かれる．$n \neq m$ の場合は，$n + m \neq 0$, $n - m \neq 0$ であるから，(1) より得られる．$n = m = 0$ の場合は明らか．その他の等式も同様にして計算できる． □

1.2.2 コサイン形のフーリエ級数

次に，フーリエ級数をコサインだけを使って書き表す方法を述べる．f を $[-\ell, \ell)$ 上に定義された実数値関数であるとする．まず，

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad C_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

とする．$C_n \neq 0$ の場合，$\theta_n \in [-\pi, \pi)$ を

$$\cos\theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}}, \qquad \sin\theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}}$$

を満たすものとする．便宜上，$C_n = 0$ の場合は $\theta_n = 0$ とおく．このとき，$C_n \neq 0$ であれば，

$$\begin{aligned}
&a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \\
&= \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}}\cos n\omega x + \frac{b_n}{\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}}\sin n\omega x\right) \\
&= C_n\left(\cos\theta_n \cos n\omega x + \sin\theta_n \sin n\omega x\right) \\
&= C_n \cos(n\omega x - \theta_n).
\end{aligned}$$

よって，f のフーリエ級数は形式的に次のように表すことができる:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega x - \theta_n). \tag{1.4}$$

この式 (1.4) の右辺が**コサイン形のフーリエ級数**である．同様の議論により，**サイン形のフーリエ級数**も考えることができる．

ところで，このコサイン形のフーリエ級数 (1.4) の各部分には次のような名称がつけられており，応用数学などでしばしば用いられている．

$C_n \cos(n\omega x - \theta_n)$	...	n 次高調波
$C_1 \cos(\omega x - \theta_1)$	...	基本成分波

ω	...	基本角周波数
C_n	...	高調波振幅
θ_n	...	位相遅れ

一般に，関数 $A\cos(\alpha x+\beta)$ を**単振動**あるいは**1 次元調和振動**というが，これについても次のような名称がつけられている．

α	...	角周波数
β	...	初期位相
A	...	振幅
$\alpha/(2\pi)$	...	周波数
$2\pi/\alpha$	...	周期

これらの言葉を使っていえば，**関数 f がフーリエ級数展開できるとは，f が角周波数 $n\omega$，振幅 C_n，初期位相 $-\theta_n$ の 1 次元調和振動をたし合わせたものに等しい**，ということになる．

1.3 フーリエ級数展開できる関数

本節では，どのような関数であればフーリエ級数展開できるかを考える．すなわち，どのような条件を満たせば，

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}c_k(f)e^{ik\omega x}$$

が成り立つのかを調べる．すでに述べたように，Fourier 自身は，考えられる関数はすべてフーリエ級数展開可能であると考えていた．しかし，少なくとも現代数学における「関数」の定義に基づいて考えるならば，Fourier の考えは正しくはなかった．たとえば，次のような例が知られている:

(1) 周期 2ℓ の連続関数で，

$$\limsup_{N\to\infty}|s_N[f](0)|=\infty$$

となるようなものが存在する (du Bois-Reymond, 1876 年，14.2 節参照)．

(2) $E\subset[-\ell,\ell)$ をルベーグ測度 0 集合とすると，周期 2ℓ の連続関数で，すべての $x\in E$ に対して

$$\limsup_{N\to\infty}|s_N[f](x)|=\infty \tag{1.5}$$

を満たすものが存在する (Kahne-Katznelson, 1965 年)．

(3) 周期 2ℓ の関数が，$[-\ell,\ell)$ で積分可能でも，いたるところで (1.5) を満たすようなものが存在する (Kolmogorov, 1923 年).

まず，連続関数のフーリエ級数展開について考えることにする．先に記した du Bois-Reymond と Kahne-Katznelson の結果から，一般には，連続関数をすべての点でフーリエ級数展開することはできない．しかし，もしある点で次のような条件が満たされていれば，その点でフーリエ級数展開ができる．

定理 1.2 f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の連続関数とする．もしある点 $x_0 \in [-\ell,\ell)$ において，

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right|^2 dh < \infty \tag{1.6}$$

が，ある $\delta > 0$ に対して成り立っているならば，

$$f(x_0) = \lim_{N\to\infty} s_N[f](x_0)$$

が成り立つ．

たとえば，$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であれば，十分小さな $\delta > 0$ に対して，ある正数 C が存在し，

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leqq C\,|h|, \qquad |h| < \delta$$

を満たす．したがって，(1.6) が成り立っている．

以下では，定理 1.2 を証明するが，この証明にはフーリエ級数論の重要なテクニックがふんだんに使われている．まず準備として，ベッセルの不等式とよばれる不等式とディリクレ核とよばれる関数の性質について述べる．はじめにベッセルの不等式とその証明を述べる．なお，1.6 節において定理 1.2 の一般化について論ずる．

補題 1.3 (ベッセルの不等式) f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数で，$[-\ell,\ell)$ 上で **2 乗可積分**，すなわち

$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

を満たすものとする．このとき

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqq \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\,dx \tag{1.7}$$

が成り立つ．

証明 $|s_N[f]-f|^2$ の積分を評価することにより，次のようにして求める不等式が得られる:

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |s_N[f](x)-f(x)|^2\,dx \\
&= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \left\{ |s_N[f](x)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(s_N[f](x)\overline{f(x)}\right) + |f(x)|^2 \right\} dx. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

ここで命題 1.1 より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |s_N[f](x)|^2\,dx &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ik\omega x}\right)\left(\overline{\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ik\omega x}}\right)dx \\
&= \sum_{k,k'=-N}^{N} c_k(f)\overline{c_{k'}(f)}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{i(k-k')\omega x}dx \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\overline{c_k(f)} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2
\end{aligned}
$$

である．また

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} s_N[f](x)\overline{f(x)}\,dx &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} e^{ik\omega x}\overline{f(x)}\,dx \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)\overline{c_k(f)} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 .
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \mathrm{Re}\left(s_N[f](x)\overline{f(x)}\right)dx &= \frac{1}{2\ell}\mathrm{Re}\int_{-\ell}^{\ell} s_N[f](x)\overline{f(x)}\,dx \\
&= \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2
\end{aligned}
$$

である．これらの式を (1.8) に代入してまとめると，

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 - 2\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 + \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\,dx \\
&= -\sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 + \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\,dx
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで $N\to\infty$ とすることにより求める不等式が証明される． □

この不等式からリーマン・ルベーグの補題 (補題 1.31 参照) とよばれるものの特別な場合が証明される．

系 1.4 f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数で，$[-\ell,\ell)$ で 2 乗可積分であるとする．このとき次が成り立つ:

$$
\lim_{|k|\to\infty} c_k(f) = 0,
$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x\,dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x\,dx = 0.$$

証明 ベッセルの不等式から $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(f)|^2 < \infty$ であるから，$\lim_{|k|\to\infty}|c_k(f)|^2 = 0$ であり，したがって一番目の等式は明らかである．$f(x)$ が実数値関数の場合，

$$\mathrm{Re}\,c_n(f) = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x\,dx,$$

$$\mathrm{Im}\,c_n(f) = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x\,dx$$

であるから，二番目と三番目の等式が成り立つ．

$f(x)$ が複素数値の場合は，$f(x)$ の実部と虚部にいま証明した実数値関数に対する二番目と三番目の等式を適用すればよい． □

次にディリクレ核について述べる．これはフーリエ級数の収束を調べるために Dirichlet により導入された関数である．フーリエ部分和は定義から次のように書ける：

$$s_N[f](x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{ik\omega x} = \sum_{k=-N}^{N}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)e^{-ik\omega t}dt\,e^{ik\omega x}$$

$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\omega(x-t)}\,dt.$$

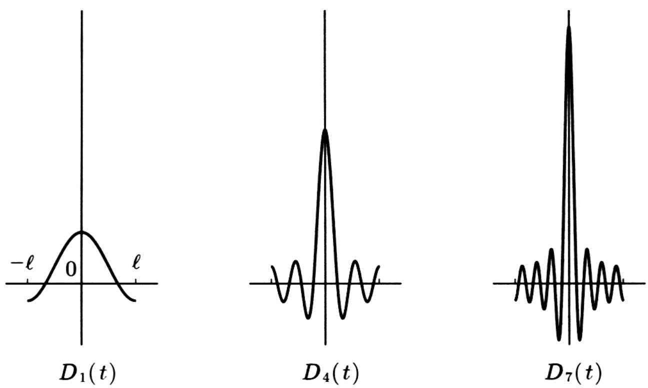


図 1.6 ディリクレ核のグラフ

ここで

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\omega x}$$

とおくと，部分和 $s_N[f](x)$ は次のような積分で表すことができる:

$$s_N[f](x) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)D_N(x-t)\,dt.$$

この $D_N(x)$ が**ディリクレ核**である．

定理 1.2 の証明に必要なディリクレ核のもつ性質をいくつか証明するが，そのまえに積分に関する補題を示しておく．

補題 1.5 $g(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数で，$[-\ell,\ell)$ で積分可能であるとする．このとき，任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して，次が成り立つ:

$$\int_{-\ell+a}^{\ell+a} g(x)\,dx = \int_{-\ell}^{\ell} g(x)\,dx.$$

証明 $a = 2n\ell + a'$ を満たす整数 n と $a' \in [0,2\ell)$ が存在する．したがって

$$\begin{aligned}
\int_{-\ell+a}^{\ell+a} g(x)\,dx &= \int_{-\ell+a'+2n\ell}^{\ell+a'+2n\ell} g(x)\,dx = \int_{-\ell+a'}^{\ell+a'} g(x+2n\ell)\,dx \\
&= \int_{-\ell+a'}^{\ell+a'} g(x)\,dx = \int_{-\ell+a'}^{\ell} g(x)\,dx + \int_{\ell}^{\ell+a'} g(x)\,dx \\
&= \int_{-\ell+a'}^{\ell} g(x)\,dx + \int_{-\ell}^{-\ell+a'} g(x+2\ell)\,dx \\
&= \int_{-\ell+a'}^{\ell} g(x)\,dx + \int_{-\ell}^{-\ell+a'} g(x)\,dx = \int_{-\ell}^{\ell} g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

補題 1.6 (1) $D_N(-x) = D_N(x)$, $D_N(x+2n\ell) = D_N(x)$ $(n = \pm1, \pm2, \cdots)$.

(2) $a \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} D_N(a-t)\,dt = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} D_N(t)\,dt = 1.$$

(3) $t \in [-\ell,\ell)$, $t \neq 0$ に対して

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}.$$

証明 (1) 前半の等式は定義より明らかである．後半の等式は

$$e^{ik\omega(x+2n\ell)} = e^{ik\omega x}e^{2ik\frac{\pi}{\ell}n\ell} = e^{ik\omega x}e^{2ik\pi n} = e^{ik\omega x}$$

による．

(2) $a-t=s$ とおくと

$$\int_{-\ell}^{\ell} D_N(a-t)\,dt = -\int_{a+\ell}^{a-\ell} D_N(s)\,ds = \int_{-\ell+a}^{\ell+a} D_N(s)\,ds.$$

ここで $D_N(s)$ が周期 2ℓ の関数であることに注意すれば，補題 1.5 より

$$\int_{-\ell+a}^{\ell+a} D_N(s)\,ds = \int_{-\ell}^{\ell} D_N(s)\,ds$$

が示せる．さらに命題 1.1 より

$$\int_{-\ell}^{\ell} D_N(s)\,ds = \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\ell}^{\ell} e^{ik\omega s} ds = 2\ell$$

が得られる．

(3) 次の計算による：

$$\begin{aligned} D_N(t) &= e^{-iN\omega t}\left(1+e^{i\omega t}+e^{2i\omega t}+\cdots+e^{2iN\omega t}\right) \\ &= e^{-iN\omega t}\frac{1-e^{i(2N+1)\omega t}}{1-e^{i\omega t}} \\ &= e^{-iN\omega t}\frac{1-e^{i(2N+1)\omega t}}{e^{i\omega t/2}\left(e^{-i\omega t/2}-e^{i\omega t/2}\right)} \\ &= \frac{e^{-i(N+1/2)\omega t}-e^{i(N+1/2)\omega t}}{e^{-i\omega t/2}-e^{i\omega t/2}} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}. \end{aligned}$$ □

以上の準備のもと，定理 1.2 の証明を行う．

定理 1.2 の証明 $x_0-t=s$ とおくと

$$\begin{aligned} s_N[f](x_0) &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)D_N(x_0-t)\,dt = -\frac{1}{2\ell}\int_{\ell+x_0}^{-\ell+x_0} f(x_0-s)D_N(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell+x_0}^{\ell+x_0} f(x_0-s)D_N(s)\,ds = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x_0-s)D_N(s)\,ds. \end{aligned}$$

補題 1.6 (2) より

$$f(x_0) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x_0)D_N(s)\,ds$$

である．ゆえに

$$s_N[f](x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \{f(x_0-s)-f(x_0)\}\,D_N(s)\,ds$$

と表される．したがって補題 1.6 (3) より

$$s_N[f](x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \{f(x_0-s)-f(x_0)\}\,\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega s}{\sin\dfrac{\omega s}{2}}\,ds.$$

ここで

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 - s) - f(x_0)}{\sin \dfrac{\omega s}{2}} & (s \in [-\ell, \ell)\,, s \neq 0) \\ 0 & (s = 0) \end{cases}$$

とおく．このとき，ある正数 $\delta' < \delta$, $\delta' < \ell$ が存在し，$|s| \leqq \delta'$ ならば

$$\left|\sin \frac{\omega s}{2}\right| \geqq \frac{\omega}{4} |s|$$

を満たしている．したがって

$$\int_{-\delta'}^{\delta'} |g(x)|^2 \, dx \leqq \frac{16}{\omega^2} \int_{-\delta'}^{\delta'} \left|\frac{f(x_0 - s) - f(x_0)}{s}\right|^2 ds < \infty$$

である．一方，$\delta' < |s| \leqq \ell$ ならば

$$\frac{\omega\delta'}{2} < \left|\frac{\omega s}{2}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

より，ω と δ' にのみ依存するある正数 ε が存在し，

$$\left|\sin \frac{\omega s}{2}\right| \geqq \varepsilon$$

が成り立つ．ゆえに

$$\int_{[-\ell,-\delta']\cup[\delta',\ell)} |g(x)|^2 \, dx \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{[-\ell,-\delta']\cup[\delta',\ell)} |f(x_0 - s) - f(x_0)|^2 \, ds < \infty$$

であるから，$g(s)$ は $[-\ell, \ell)$ で 2 乗可積分である．したがって，

$$\begin{aligned} s_N[f](x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(s) \sin \left(N + \frac{1}{2}\right) \omega s \, ds \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(s) \sin \frac{\omega s}{2} \cos N\omega s \, ds + \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(s) \cos \frac{\omega s}{2} \sin N\omega s \, ds. \end{aligned}$$

最後の式において，$g(s) \sin \dfrac{\omega s}{2}$ も $g(s) \cos \dfrac{\omega s}{2}$ も $[-\ell, \ell)$ で 2 乗可積分であるから，系 1.4 より

$$\lim_{N \to \infty} s_N[f](x_0) - f(x_0) = 0$$

が得られる． □

Fourier の理論が現れて間もない 1823 年に，Dirichlet はフーリエ級数の収束に関する重要な定理を証明した．それには，ある種の不連続点でのフーリエ級数の挙動に関する記述も含まれている．前述のディリクレ核はその証明の中で Dirichlet により定義されたものである．以下ではその特別な場合として，区分的に滑らかとよばれる条件のもとでのディリクレの定理を証明する．そのため「区分的に滑らかな関数」の定義からはじめる．

定義 1.1 関数 $f(x)$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき，$[a,b]$ 上で**区分的に滑らか**であるという.

(i) $[a,b]$ に属するある有限個の点 $c_1,\cdots,c_n$ を除いたところで $f(x)$ は連続微分可能である[3].

(ii) 上述の点 c_k $(k=1,\cdots,n)$ が (a,b) 内の点の場合は，$f(x)$ の複素 (あるいは実) 数値の左側極限と右側極限，すなわち

$$f(c_k-0)=\lim_{h\to 0,h>0} f(c_k-h),$$

$$f(c_k+0)=\lim_{h\to 0,h>0} f(c_k+h),$$

ならびに $f'(x)$ の複素 (あるいは実) 数値の左側極限と右側極限，すなわち

$$f'(c_k-0)=\lim_{h\to 0,h>0} f'(c_k-h),$$

$$f'(c_k+0)=\lim_{h\to 0,h>0} f'(c_k+h)$$

が存在する．c_k が区間の左の端点の場合は $f(x), f'(x)$ の複素 (あるいは実) 数値の右側極限が，c_k が区間の右の端点の場合は複素 (あるいは実) 数値の左側極限が存在する.

フーリエ級数では周期関数を扱う．周期関数に対しては区分的に滑らかであることを次のように定義する.

定義 1.2 $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の関数で，周期 2ℓ をもつものとする．この関数が $[-\ell,\ell]$ 上で区分的に滑らかであるとき，$f(x)$ を単に**区分的に滑らか**であるという.

$f'(c_k-0), f'(c_k+0)$ は上記のように定義しているが，次のことが成り立つ.

補題 1.7 $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の周期 2π をもつ関数で，区分的に滑らかであるとする．このとき

$$\lim_{h>0,h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c+0)}{h}=f'(c+0),$$

$$\lim_{h<0,h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c-0)}{h}=f'(c-0)$$

である.

[3] この定義において，$f(x)$ は (i) の c_k においては必ずしも定義されていなくてもよいことにする.

証明 関数を実部と虚部に分けて考えることにより，f が実数値の場合を示せば十分である．

前半の主張を証明する．$h > 0$ を十分小さくとる．

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (c < x < c+h) \\ f(c+0) & (x = c) \end{cases}$$

とすると $F(x)$ は $[c, c+h]$ で連続であり，$(c, c+h)$ で微分可能である．したがって $h > \delta > 0$ に対して平均値の定理を用いることにより

$$f(c+\delta) - f(c+0) = F(c+\delta) - F(c) = \delta F'(\xi_\delta) = \delta f'(\xi_\delta)$$

を満たす $\xi_\delta \in (c, c+\delta)$ の存在がわかる．ゆえに

$$\frac{f(c+\delta) - f(c+0)}{\delta} = f'(\xi_\delta).$$

ここで $\delta \to 0$ とすると，$\xi_\delta \to 0$ でなければならないので，f' が右側極限をもつことより

$$\lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \frac{f(c+\delta) - f(c+0)}{\delta} = f'(c+0)$$

が得られる．後半の主張も同様に証明できる． □

区分的に滑らかな関数の例をあげておく．

▶ **例 1** 関数 $f(x)$ が周期 2π をもつ連続微分可能な関数であれば，区分的に滑らかである． □

▶ **例 2** 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数で，$[-\pi, \pi)$ 上で次のようになっているとする[4)]:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [-\pi, 0)) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x \in (0, \pi)). \end{cases}$$

このとき，$f(x)$ は区分的に滑らかであり，

$$\begin{aligned} &f(0-0) = 1, \qquad f(0+0) = -1, \\ &f'(0-0) = 0 = f'(0+0), \\ &f(-\pi-0) = -1, \qquad f(-\pi+0) = 1, \\ &f'(-\pi-0) = 0 = f'(-\pi+0). \end{aligned}$$

□

[4)] 周期 2π の関数は $[-\pi, \pi)$ でどのような値をとるかがわかれば $\mathbf{R}$ 上でどのような値をとるかがわかる．

▶ **例 3** 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数で，$[-\pi,\pi)$ 上で次のようになっているとする:

$$f(x)=\begin{cases} x+\pi & (x\in[-\pi,0)) \\ -x+\pi & (x\in[0,\pi)). \end{cases}$$

このとき，$f(x)$ は連続かつ区分的に滑らかであり，

$$f'(0-0)=1, \qquad f'(0+0)=-1,$$
$$f'(-\pi-0)=-1, \qquad f'(-\pi+0)=1. \qquad \square$$

「区分的に連続」という概念も導入しておく．

定義 1.3 関数 $f(x)$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき，$[a,b]$ 上で**区分的に連続**であるという．

(i) $[a,b]$ に属するある有限個の点 $c_1,\cdots,c_n$ を除いたところで $f(x)$ は連続である[5]．

(ii) 上述の点 c_k $(k=1,\cdots,n)$ では $f(x)$ の複素 (あるいは実) 数値の左側極限と右側極限，すなわち

$$f(c_k-0)=\lim_{h\to 0,h>0} f(c_k-h),$$
$$f(c_k+0)=\lim_{h\to 0,h>0} f(c_k+h)$$

が存在する．

区分的に滑らかな関数に関するディリクレの定理を述べると次のようになる．

定理 1.8 $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上で定義された周期 2ℓ の関数で，区分的に滑らかであるとする．このとき，任意の x に対して

$$\lim_{N\to\infty} s_N[f](x)=\frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$$

が成り立つ．さらに $f(x)$ が $x=x_0$ で連続であれば，

$$\lim_{N\to\infty} s_N[f](x_0)=f(x_0)$$

が成り立つ．

[5] この定義において，$f(x)$ は (i) の c_k においては必ずしも定義されていなくてもよいことにする．

この定理の証明のためにディリクレ核に関する次の性質を証明しておく.

補題 1.9 $$\frac{1}{2\ell}\int_0^\ell D_N(t)\,dt = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^0 D_N(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

証明 補題 1.6 より

$$\frac{1}{2\ell}\int_0^\ell D_N(t)\,dt = \frac{1}{2\ell}\int_0^\ell D_N(-t)\,dt = -\frac{1}{2\ell}\int_0^{-\ell} D_N(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^0 D_N(t)\,dt.$$

また,

$$\frac{1}{2\ell}\int_0^\ell D_N(t)\,dt + \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^0 D_N(t)\,dt = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^\ell D_N(t)\,dt = 1.$$

ゆえに補題が示された. □

定理 1.8 の証明 証明すべきことは,

$$I_N = s_N[f](x) - \frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$$

が $N\to\infty$ のときに 0 に収束することである. ディリクレ核を用いて

$$I_N = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^\ell f(x+s)D_N(s)\,dt - \frac{1}{2}\{f(x-0)+f(x+0)\}$$

と表せる. いま,

$$II_N = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^0 f(x+s)D_N(s)\,ds - \frac{1}{2}f(x-0),$$
$$III_N = \frac{1}{2\ell}\int_0^\ell f(x+s)D_N(s)\,ds - \frac{1}{2}f(x+0)$$

とおくと, $I_N = II_N + III_N$ である.

まず $\lim_{N\to\infty} II_N = 0$ を示す. 補題 1.6 より

$$II_N = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^0 \{f(x+s)-f(x-0)\}\,D_N(s)\,ds$$
$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^0 \{f(x+s)-f(x-0)\}\,D_N(-s)\,ds$$
$$= \frac{1}{2\ell}\int_0^\ell \{f(x-s)-f(x-0)\}\,D_N(s)\,ds$$
$$= \frac{1}{2\ell}\int_0^\ell \left\{\frac{f(x-s)-f(x-0)}{\sin\frac{1}{2}\omega s}\right\}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega s\,ds.$$

ここで $s\in(0,\ell]$ に対して

$$F(s) = \frac{f(x-s)-f(x-0)}{\sin\frac{1}{2}\omega s}$$

とおくと，

$$\lim_{s\to 0, s>0} F(s) = \lim_{s\to 0, s>0} \frac{f(x-s)-f(x-0)}{s} \frac{s}{\sin\frac{1}{2}\omega s} = \frac{2}{\omega} f'(x-0)$$

である[6]．ゆえに $F(s)$ は $[0,\ell]$ で区分的連続である (区分的連続の定義の脚注参照)．区分的に連続ならば $[0,\ell]$ 上で 2 乗可積分である (実際，本質的に有界 (後述の定義 1.5 参照) かつ可測である) から，系 1.4 を用いれば，定理 1.2 の証明と同様にして，

$$\lim_{N\to\infty} II_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell F(s) \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega s\, ds = 0$$

が得られる．実際，

$$f(s) = \begin{cases} F(s) & (s\in[0,\ell)) \\ 0 & (s\in[-\ell,0)) \end{cases}$$

として系 1.4 を適用すればよい．同様の方法で $\lim_{N\to\infty} III_N = 0$ も示せる． □

この定理の数学的に興味深い適用例を例題として二つあげておく．

例題 1 $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ が周期 2π をもち，$x\in[-\pi,\pi)$ では

$$f(x) = x + x^2$$

となっているものとする．$f(x)$ の $x=\pi$ でのフーリエ級数展開を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

を求めよ．

答 部分積分を用いると，$n\neq 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{i}{n}e^{-inx}\right)' dx = \left[x\frac{i}{n}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{n}e^{-inx}dx$$
$$= 2\frac{\pi}{n}i(-1)^n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\left(\frac{i}{n}e^{-inx}\right)' dx = \left[x^2\frac{i}{n}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\frac{i}{n}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx$$
$$= 4\frac{\pi}{n^2}(-1)^n.$$

ゆえに

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left(2\frac{\pi}{n}i(-1)^n + 4\frac{\pi}{n^2}(-1)^n\right) = \left(\frac{i}{n}+\frac{2}{n^2}\right)(-1)^n.$$

---

6) $\lim_{s\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}s}{s} = \frac{1}{2}$, $\lim_{s\to 0} \frac{s}{\sin\frac{1}{2}\omega s} = \frac{2}{\omega}$.

また,

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(x + x^2\right) dx = \frac{1}{3}\pi^2.$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{f(x+0) - f(x-0)\} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} \\ &= \frac{1}{3}\pi^2 + \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{n=-N,\\ n\neq 0}}^{N}\left(\frac{i}{n} + \frac{2}{n^2}\right)(-1)^n e^{inx}\end{aligned}$$

である．いま $x = \pi$ とすると，

$$\frac{1}{2}\{f(\pi+0) + f(\pi-0)\} = \frac{1}{2}\left(-\pi + \pi^2 + \pi + \pi^2\right) = \pi^2$$

であるから

$$\pi^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$$

が得られる．以上より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2.$$

□

例題 2　$f(x)$ を周期 2ℓ の関数で,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\ell \leqq x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x < \ell) \end{cases}$$

を満たすものとする．

(1) $f(x)$ のフーリエ級数係数 a_n, b_n を求めよ．

(2) $f(x)$ の $x = \ell/2$ でのフーリエ級数展開を用いて，π の有理数による近似式

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

を示せ．

答　(1) 三角関数によるフーリエ級数の表示により考える．$f(x)$ は奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) であるから，明らかに

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos n\omega t\, dt = 0$$

である．一方,

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin n\omega t\, dt = \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \sin n\omega t\, dt = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{4}{n\pi} & (n \text{ が奇数}). \end{cases}$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\{f(x+0) - f(x-0)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\omega x.$$

(2) さて，ここで，$x = \ell/2$ の場合に定理 1.8 を適用してみると次のようになる:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}(-1)^n.$$

以上より，次のような π の有理数による近似式が示される:

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

□

1.4 絶対収束するフーリエ級数

関数項級数が絶対収束するための十分条件のひとつとして，次のワイエルシュトラスの優級数定理が知られている．

定理 1.10 (ワイエルシュトラスの優級数定理) E を $\mathbf{R}^d$ の空でない部分集合とする．$f_n(x)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を E 上の複素数値関数とする．もしもある正数 M_n を $|f_n(x)| \leqq M_n$ $(x \in E)$, かつ $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n < \infty$ が成り立つようにとることができるならば，E 上のある関数 $f(x)$ に級数 $\displaystyle\sum_{n=-N'}^{N} f_n(x)$ は，E 上で絶対かつ一様収束する．すなわち

$$\lim_{N,N'\to\infty} \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=-N'}^{N} f_n(x) - f(x) \right| = 0,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n(x)| \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n < \infty \qquad (x \in E).$$

この定理は本節で本質的な役割を果たすので，その証明を記しておく．

証明 証明には複素数の完備性，すなわち複素数列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} |z_n - z_m| = 0$ を満たしているならば，ある複素数 z で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = z$ を満たすものが一意的に存在するという性質を用いる．$x \in E$ に対して，$r_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$, $q_{N'}(x) = \displaystyle\sum_{n=-N'}^{-1} f_n(x)$

とおく．$N < L$ に対して，$N, L \to \infty$ とすると

$$|r_L(x) - r_N(x)| \leqq \sum_{n=N+1}^{L} |f_n(x)| \leqq \sum_{n=N+1}^{L} M_n \to 0$$

となっている．したがって，複素数の完備性より，ある複素数 $a(x)$ で，$\lim_{N\to\infty} |r_N(x) - a(x)| = 0$ を満たすものが存在する．また，

$$|r_N(x) - a(x)| = \lim_{L\to\infty} |r_N(x) - r_L(x)| \leqq \lim_{L\to\infty} \sum_{n=N+1}^{L} |f_n(x)| \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$$

であるから，

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in E} |r_N(x) - a(x)| \leqq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n = 0$$

が成り立っている．同様にして $x \in E$ に対して，ある複素数 $b(x)$ が存在し，

$$\lim_{N'\to\infty} \sup_{x\in E} |q_{N'}(x) - b(x)| = 0$$

が成り立つ．したがって $f(x) = a(x) + b(x)$ とすれば

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in E} \left| \sum_{n=-N'}^{N} f_n(x) - f(x) \right| &\leqq \sup_{x\in E} |r_N(x) + q_{N'}(x) - a(x) - b(x)| \\
&\leqq \sup_{x\in E} |r_N(x) - a(x)| + \sup_{x\in E} |q_{N'}(x) - b(x)| \\
&\to 0 \qquad (N, N' \to \infty).
\end{aligned}$$

以上で定理の前半が証明された．後半の主張は仮定から明らかである． □

この定理を用いて，フーリエ級数が絶対かつ一様収束するためのひとつの十分条件を示すことができる．

定理 1.11 $f(x)$ を周期 2ℓ の関数で，$\mathbf{R}$ 上で C^2 級であるとする．このとき，$s_N[f](x)$ は $f(x)$ に $\mathbf{R}$ 上で絶対かつ一様収束する．

補題 1.12 $f(x)$ を周期 2ℓ の関数で，$\mathbf{R}$ 上で C^k 級であるとする．$A_k = \omega^{-k} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(k)}(x) \right|$ とおく．ただし，$f^{(k)}$ により f の k 階導関数を表すとする．このとき，$A_k < \infty$ であり，$n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対して，次が成り立つ:

$$|c_n(f)| \leqq A_k \frac{1}{|n|^k} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

証明 部分積分より，$n \neq 0$ の場合，$0 \leqq p \leqq k-1$ に対して，

$$c_n(f^{(p)}) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^{(p)}(x) e^{-in\omega x} dx = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^{(p)}(x) \left(\frac{-1}{in\omega} e^{-in\omega x} \right)' dx$$

$$= \frac{1}{2\ell}\left[f^{(p)}(x)\frac{-1}{in\omega}e^{in\omega x}\right]_{x=-\ell}^{\ell} + \frac{1}{2\ell in\omega}\int_{-\ell}^{\ell} f^{(p+1)}(x)e^{-in\omega x}dx$$

$$= \frac{1}{2\ell in\omega}\int_{-\ell}^{\ell} f^{(p+1)}(x)e^{-in\omega x}dx = \frac{1}{in\omega}c_n(f^{(p+1)}).$$

ゆえに

$$c_n(f) = \frac{1}{in\omega}c_n(f^{(1)}) = \frac{1}{i^2n^2\omega^2}c_n(f^{(2)}) = \cdots = \frac{1}{i^kn^k\omega^k}c_n(f^{(k)})$$

が得られる．したがって，

$$|c_n(f)| \leqq \frac{1}{|n|^k\omega^k}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\left|f^{(k)}(x)\right|dx \leqq A_k\frac{1}{|n|^k}.$$ □

定理 1.11 の証明 補題 1.12 を $k = 2$ の場合に適用すると，$n \neq 0$ に対して，$\left|c_n(f)e^{in\omega x}\right| \leqq A_2\frac{1}{|n|^2}$ であるから，$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{|n|^2} < \infty$ と定理 1.10 および定理 1.2 より定理が証明される． □

この議論では，関数の滑らかさが C^1 級の場合に直接適用できない．関数の滑らかさが C^2 級よりも悪い場合にも適用できる証明方法を紹介しておこう．次の定義をしておく．

定義 1.4 $\alpha > 0$ とする．$\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で一様に **α–ヘルダー連続**とは，ある正の定数 M が存在し，すべての $x, y \in \mathbf{R}$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leqq M|x - y|^{\alpha} \tag{1.9}$$

が成り立つことである．特に，一様に 1–ヘルダー連続であることを**一様にリプシッツ連続**という．

明らかに，一様に α–ヘルダー連続な関数は $\mathbf{R}$ 上で連続である．さらに次のことが成り立つ．

命題 1.13 $f(x)$ を周期 2ℓ の関数とする．

(1) $0 < \alpha < \beta$ とする．f が $\mathbf{R}$ 上で一様に β–ヘルダー連続ならば，$\mathbf{R}$ 上で一様に α–ヘルダー連続である．

(2) f が $\mathbf{R}$ 上で C^1 級ならば $\mathbf{R}$ 上で一様にリプシッツ連続である．

(3) $\alpha > 1/2$ とする．f が $\mathbf{R}$ 上で一様に α–ヘルダー連続であれば，$\mathbf{R}$ の任意の点で定理 1.2 の条件を満たす．

証明　(1) f が周期 2ℓ であることと，$x, y \in [-\ell, \ell)$ に対して，

$$|x-y|^\beta \leqq (2\ell)^{\beta-\alpha} |x-y|^\alpha$$

であることより明らか．

(2) f' は $[-\ell, \ell]$ 上で連続であるから，有界である．すなわち，ある正の定数 M が存在し，$|f'(x)| \leqq M$ $(x \in [-\ell, \ell])$ である．f が周期関数であることより，$\mathbf{R}$ 上で $|f'(x)| \leqq M$ である．したがって，微分積分の基本定理より，$x, y \in \mathbf{R}$ に対して，

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(x)\,dx \right| \leqq M \int_y^x dx = M\,|x-y|\,.$$

(3) $\alpha > 1/2$ より，任意の $x_0 \in [-\ell, \ell)$ に対して，

$$\int_{-\ell}^{\ell} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right|^2 dh \leqq M^2 \int_{-\ell}^{\ell} \frac{|h|^{2\alpha}}{|h|^2}\,dh = 2M^2 \int_0^{\ell} h^{2\alpha-2} dh < \infty$$

である．□

注意　$\alpha > 1$ の場合，一様に α–ヘルダー連続な関数は定数関数に限る．実際，関数 $f(x)$ が $\alpha > 1$ に対して一様に α–ヘルダー連続ならば

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqq M \lim_{h \to 0} \frac{|h|^\alpha}{|h|} = 0$$

であるから，$f(x)$ は微分可能で，$f'(x) = 0$ $(x \in \mathbf{R})$ となる．

命題 1.14 区分的に滑らかな連続関数は一様にリプシッツ連続である．

証明　証明方法は基本的に命題 1.13(2) と同様である．$f(x)$ の $[-\ell, \ell)$ における微分不可能な点を $-\ell \leqq c_0 < c_1 < \cdots < c_n < \ell$ とする．

$$M = \sup_{x \in [-\ell, \ell) \setminus \{c_0, \cdots, c_n\}} \left| f'(x) \right|$$

とおくと，仮定より $M < \infty$ である (なお集合 $A \subset B$ に対して $B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}$ とする)．任意に $x, y \in [-\ell, \ell)$ $(x < y)$ をとる．まず x, y の間に不連続点がある場合を考える．

$$c_k \leqq x < c_{k+1} < \cdots < c_{k+m} < y \leqq c_{k+m+1}$$

を満たしているとする．このとき，

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqq |f(x) - f(c_{k+1})| + \cdots + |f(c_{k+m}) - f(y)| \\ &= \left| \int_x^{c_{k+1}} f'(t)\,dt \right| + \cdots + \left| \int_{c_{k+m}}^y f'(t)\,dt \right| \\ &\leqq M(c_{k+1} - x + c_{k+2} - c_{k+1} + \cdots + y - c_{k+m}) = M(y-x) \end{aligned}$$

が成り立つ．x, y の間に不連続点がない場合も同様である．□

定理 1.15 (ベルンシュタインの定理) $1/2 < \alpha$ とする．$f(x)$ を周期 2ℓ の関数で，一様に α–ヘルダー連続であるとする．このとき，$s_N[f](x)$ は $f(x)$ に $\mathbf{R}$ 上で絶対かつ一様収束している．

証明 命題 1.13(3) およびワイエルシュトラスの優級数定理より

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty \tag{1.10}$$

を示せばよい．$\varphi(x) = f(x+h) - f(x-h)$ とおくと，

$$|\varphi(x)| \leqq 2M\,|h|^{\alpha}$$

である．また，

$$\begin{aligned} c_k(\varphi) &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left\{e^{-ik\omega(x-h)} - e^{-ik\omega(x+h)}\right\}dx \\ &= c_k(f)\left(e^{ik\omega h} - e^{-ik\omega h}\right) = 2ic_k(f)\sin k\omega h. \end{aligned}$$

したがって，ベッセルの不等式より，

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |2ic_k(f)\sin k\omega h|^2 \leqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\varphi)|^2 &\leqq \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |\varphi(x)|^2\,dx \\ &\leqq 4M^2\,|h|^{2\alpha} \end{aligned}$$

である．$n = 0, 1, 2, \cdots$ とする．$2^n \leqq |k| < 2^{n+1}$ のとき，h として $h = 2^{-n-2}\ell$ を考えると，

$$\frac{\pi}{4} = 2^n\frac{\pi}{\ell}2^{-n-2}\ell \leqq |k\omega h| < 2^{n+1}\frac{\pi}{\ell}2^{-n-2}\ell = \frac{\pi}{2}$$

であるから，$|\sin k\omega h| \geqq \frac{1}{2}$ である．ゆえに

$$\begin{aligned} \sum_{2^n \leqq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)|^2 \leqq \sum_{2^n \leqq |k| < 2^{n+1}} |2ic_k(f)\sin k\omega h|^2 &\leqq 4M^2\,|h|^{2\alpha} \\ &= 4M^2\ell^{2\alpha}2^{-2\alpha(n+2)} \leqq M^2\ell^{2\alpha}2^{-2n\alpha}. \end{aligned}$$

シュヴァルツの不等式を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{2^n \leqq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)| &\leqq \left(\sum_{2^n \leqq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{2^n \leqq |k| < 2^{n+1}} 1^2\right)^{1/2} \\ &\leqq M\ell^{\alpha}2^{-n\alpha} \times \left(2^{n+2}\right)^{1/2} = 2M\ell^{\alpha}2^{-n(\alpha-1/2)}. \end{aligned}$$

ここで $\alpha - 1/2 > 0$ より，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{2^n \leqq |k| < 2^{n+1}} |c_k(f)| \leqq 2M\ell^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(\alpha-1/2)} < \infty$$

である．絶対収束級数は項の順序を入れ替えても同じ極限に収束する．以上より (1.10) が得られる． □

1.5　フーリエ級数の項別微分

フーリエ級数展開

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\omega x}$$

において，項別微分を形式的に行うと

$$f'(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} in\omega c_n(f)e^{in\omega x}$$

が成り立つ．この等式で注目すべきことは，もしもフーリエ級数展開が得られていれば，フーリエ係数に $in\omega$ をかけて和をとったものが f の微分になるということである．つまり，微分という演算が，フーリエ級数の各項に $in\omega$ をかけるという単純な演算によって得られるということである．あとの章で，この性質を用いて偏微分方程式を解くことを述べる．

本節では，このような項別微分が可能になるためのひとつの十分条件を述べる．そのまえに，一般の関数項級数の項別微分に関する定理を復習しておく．

定理 1.16 $A < B$ とする．$[A,B]$ 上の連続関数 f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が $[A,B]$ で連続な導関数をもつとする[7]．もしも $n \to \infty$ とするとき，f_n が $[A,B]$ 上である関数 f に各点収束し，かつ f_n' が $[A,B]$ 上である関数 g に一様収束するならば，f は $[A,B]$ 上で連続な導関数をもち，$f' = g$ が成り立つ．

証明　g は連続関数列の一様収束の極限であるから，$[A,B]$ 上で連続である．$x \in [A,B]$ とする．

$$F(x) = \int_A^x g(y)\,dy + f(A)$$

とおくと，F は $[A,B]$ 上で連続であり，$F'(x) = g(x)$．また，

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f(A)) + f(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A^x f_n'(y)\,dy + f(A) \\ &= \int_A^x g(y)\,dy + f(A) = F(x) \end{aligned}$$

であるから，f は $[A,B]$ 上で連続な導関数をもち，$f' = F' = g$ が成り立つ．□

この定理を用いて次の定理を得る．

---

[7] 関数 f が $[A,B]$ 上で連続な導関数をもつとは，(A,B) 上で連続な導関数 f' をもち，かつ複素 (あるいは実) 数値の極限 $\lim_{h\to 0,\, h>0} f'(A+h)$，$\lim_{h\to 0,\, h>0} f'(B-h)$ が存在することである．これらの極限をそれぞれ $f'(A)$, $f'(B)$ と定めると f' は $[A,B]$ 上の連続関数になる．

定理 1.17 k を非負の整数とし，f を周期 2ℓ の C^{k+2} 級関数とする．このとき，$p=0,1,\cdots,k$ に対して，

$$f^{(p)}(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}(in\omega)^p c_n(f)e^{in\omega x}$$

が成り立つ．ここで右辺の級数は絶対かつ一様収束している．

証明　$k\geqq 1$ の場合を示す．$p=0$ の場合は定理 1.11 にほかならない．$p=1$ の場合を示す．$s_N[f]$ は f に $[-\ell,\ell]$ 上で収束している．また，

$$s_N[f]'(x)=\sum_{n=-N}^{N}in\omega c_n(f)e^{in\omega x}$$

であり，補題 1.12 より

$$\left|in\omega c_n(f)e^{in\omega x}\right|\leqq |n|\,A_3\frac{1}{|n|^3}=A_3\frac{1}{|n|^2}$$

であるから，ワイエルシュトラスの優級数定理より，$s_N[f]'(x)$ はある関数 $g(x)$ に $[-\ell,\ell]$ 上で絶対かつ一様収束する．したがって，定理 1.16 より

$$f'(x)=\lim_{N\to\infty}s_N[f]'(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}in\omega c_n(f)e^{in\omega x}$$

が一様収束で成り立つ．明らかにこれは絶対収束している．これにより $p=1$ の場合が示せた．以下同様にして一般の $p\leqq k$ の場合も示すことができる．　□

1.6 フーリエ解析で使われるルベーグ積分の諸定理

フーリエ解析を深く学んでいくためには，ルベーグ積分の諸定理が必要である．そこで本節では，フーリエ解析で必要になるルベーグ積分に関する定理を概説しておく．まず 1.6.1 項ではルベーグ積分に関するいくつかの基本的な定理を復習する．1.6.2 項では L^p 空間の完備性の証明，1.6.3 項ではフーリエ解析でしばしば用いられるルベーグ積分に関する近似定理とその系を証明をする．最後に，1.6.4 項ではリーマン・ルベーグの補題を示す．なお,「ルベーグ可測集合」「ルベーグ可測関数」「ルベーグ積分可能」「ほとんどいたるところ」「a.e.」などの用語は既知のものとする．

以下，特に断らない限り関数は複素数値関数を意味するものとする．

1.6.1 ルベーグ空間といくつかの不等式

あとで述べるフーリエ変換でも必要になるので，主に $\mathbf{R}^d$ 上の関数の場合について述べていく．はじめに，ルベーグ空間 L^p の定義を述べる．$x=(x_1,\cdots,x_d)$,

$y=(y_1,\cdots,y_d)$ と $t\in\mathbf{R}$ に対して

$$tx=(tx_1,\cdots,tx_d),$$
$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_d+y_d),$$
$$x-y=(x_1-y_1,\cdots,x_d-y_d)$$

とする．また

$$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}$$

とする．$\mathbf{R}^d$ のルベーグ可測な部分集合 E 上の積分を

$$\int_E f(x)\,dx=\int_E f(x_1,\cdots,x_d)\,dx_1\cdots dx_d$$

と略記する．また，$E=[-\ell,\ell)$ の場合は，記号 $\int_{[-\ell.\ell)}$ を $\int_{-\ell}^{\ell}$ とも記す．

定義 1.5 E を $\mathbf{R}^d$ のルベーグ可測な部分集合とし，$1\leqq p<\infty$ とする．このとき，E 上のルベーグ可測関数 $f(x)$ に対して

$$\|f\|_{L^p(E)}=\left(\int_E|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{L^\infty(E)}=\inf\left\{t>0:\left\{x\in E:|f(x)|>t\right\}\text{ はルベーグ測度 }0\right\}$$

と定める．$\|f\|_{L^p(E)}$ を f の L^p **ノルム**という．$\|f\|_{L^p(E)}<\infty$ となるような E 上のルベーグ可測な関数を E 上の L^p **関数**，あるいは $1\leqq p<\infty$ の場合は f は E 上で p **乗可積分**，$p=\infty$ の場合は E 上で**本質的に有界**という．本書では，特に $E=\mathbf{R}^d$ の場合は

$$\|f\|_p=\|f\|_{L^p(E)}$$

と略記する．

L^p ノルムについては，次のヘルダーの不等式とミンコフスキーの不等式が有用である．

定理 1.18 (ヘルダーの不等式) [8] $1\leqq p\leqq\infty$ とし，q を $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ なる正数とする．ただし $p=1$ の場合は $q=\infty$，$p=\infty$ の場合は $q=1$ とする．このとき $f\in L^p(E)$, $g\in L^q(E)$ ならば，これらの関数の積 fg は $L^1(E)$ に属し，

$$\left|\int_E f(x)g(x)\,dx\right|\leqq\|fg\|_{L^1(E)}\leqq\|f\|_{L^p(E)}\,\|g\|_{L^q(E)}\,.$$

[8] 証明は [新井] 命題 10.2，あるいは [伊藤] p.165 を参照．

特に $p=q=2$ の場合，この不等式を**シュヴァルツの不等式**という．

定理 1.19 (ミンコフスキーの不等式) [9] $1 \leqq p \leqq \infty$ とする．$f, g \in L^p(E)$ に対して，$f+g \in L^p(E)$ であり

$$\|f+g\|_{L^p(E)} \leqq \|f\|_{L^p(E)} + \|g\|_{L^p(E)}$$

が成り立つ．

次の性質もしばしば用いられる．

定理 1.20 [10] $1 \leqq p \leqq \infty$ とする．もしも $f \in L^p(E)$ が $\|f\|_{L^p(E)} = 0$ を満たすならば，ほとんどすべての $x \in E$ に対して $f(x) = 0$ である．

ルベーグ積分で非常に重要な定理として単調収束定理とルベーグの収束定理がある．本書でもしばしば用いるので定理を記しておく．

定理 1.21 (単調収束定理) [11] E を $\mathbf{R}^d$ のルベーグ可測な部分集合とする．f_n $(n=1,2,\cdots)$ を E 上の非負値ルベーグ可測関数とし，ほとんどすべての $x \in E$ に対して

$$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \cdots \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq \cdots$$

を満たすとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \quad (\leqq \infty)$$

が成り立つ．

定理 1.22 (ルベーグの収束定理) [12] E を $\mathbf{R}^d$ のルベーグ可測な部分集合とする．$f_n \in L^1(E)$ $(n=1,2,\cdots)$ が E 上のある関数 f にほとんどいたるところ収束し，さらにある $\varphi \in L^1(E)$ が存在し，

$$|f_n(x)| \leqq \varphi(x) \text{ a.e. } x \in E$$

を満たしているとする．このとき $f \in L^1(E)$ であり，かつ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx,$$

---

[9] 証明は [新井] 命題 10.4，あるいは [伊藤] p.165 を参照．
[10] 証明はたとえば [新井] 定理 8.17 と命題 10.1 を参照．
[11] 証明は [新井] 定理 9.2，あるいは [伊藤] 定理 13.2 を参照．
[12] 証明は [新井] 定理 9.3，あるいは [伊藤] 定理 13.6 を参照．

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{L^1(E)} = 0$$

が成り立つ.

フーリエ解析では, 積分順序の交換に関するフビニの定理もよく用いられる. n, d_1, d_2 を正の整数で, $n = d_1 + d_2$ とする. $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^{d_2}$ である. $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^{d_2}$ と表す. m_j を $\mathbf{R}^{d_j}$ 上の d_j 次元ルベーグ測度とする $(j = 1, 2)$. $E_1 \subset \mathbf{R}^{d_1}$, $E_2 \subset \mathbf{R}^{d_2}$ をルベーグ可測な集合とし, $E = E_1 \times E_2$ とおくと, $E \subset \mathbf{R}^n$ はルベーグ可測な集合である.

定理 1.23 (フビニの定理) [13] **(I)** $f(x_1, x_2)$ を E 上の非負値ルベーグ可測関数とする. このとき, 次の (1)–(3) が成り立つ.

(1) m_1-a.e. $x_1 \in E_1$ に対して, $f(x_1, x_2)$ は x_2 の関数として E_2 上ルベーグ可測である. また, m_2-a.e. $x_2 \in E_2$ に対して, $f(x_1, x_2)$ は x_1 の関数として E_1 上ルベーグ可測である.

(2)
$$\int_{E_2} f(x_1, x_2)\,dx_2, \qquad \int_{E_1} f(x_1, x_2)\,dx_1$$

はそれぞれ x_1 の関数, x_2 の関数としてルベーグ可測である.

(3)
$$\begin{aligned}\int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x_1, x_2)\,dx_2\right)dx_1 &= \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x_1, x_2)\,dx_1\right)dx_2 \\ &= \int_E f(x)\,dx.\end{aligned}$$

(II) $f(x_1, x_2)$ を E 上の複素数値ルベーグ可測関数で,

$$\int_{E_1}\left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2)|\,dx_2\right)dx_1,\ \int_{E_2}\left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2)|\,dx_1\right)dx_2,\ \int_E |f(x)|\,dx$$

のいずれかが有限であれば, 他の二つも有限である. さらに, m_1-a.e. $x_1 \in E_1$ に対して, $f(x_1, x_2)$ は x_2 の関数として E_2 上ルベーグ積分可能でり, また, m_2-a.e. $x_2 \in E_2$ に対して, $f(x_1, x_2)$ は x_1 の関数として E_1 上ルベーグ積分可能である. そして

$$\begin{aligned}\int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x_1, x_2)\,dx_2\right)dx_1 &= \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x_1, x_2)\,dx_1\right)dx_2 \\ &= \int_E f(x)\,dx\end{aligned}$$

[13] [新井] 11.1 節参照.

が成り立つ．

積分記号と微分記号の交換に関する次の定理は本書でも用いる．

定理 1.24 [14] (a,b) を開区間，$E \subset \mathbf{R}^d$ を d 次元ルベーグ可測集合とする．$f(t,x)$ を $(a,b)\times E$ 上の複素数値関数で，任意に $t \in (a,b)$ を固定したとき，$f(t,x)$ は x の関数として E 上ルベーグ積分可能であり，また，任意に $x \in E$ を固定したときに $f(t,x)$ は t の関数として連続微分可能であるとする．さらに，E 上のあるルベーグ積分可能な関数 $\varphi(x)$ で

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)\right| \leqq \varphi(x) \qquad ((t,x)\in(a,b)\times E)$$

を満たすものがあるとする．このとき，$\displaystyle\int_E f(t,x)\,dx$ は t に関して微分可能であり，$\dfrac{\partial}{\partial t}f(t,x)$ は x に関してルベーグ積分可能で，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_E f(t,x)\,dx = \int_E \frac{\partial}{\partial t}f(t,x)\,dx$$

が成り立つ．

1.6.2 L^p 空間の完備性

次の定理は $L^p(E)$ の完備性とよばれる性質を保証するものである．完備性に関する説明は第 6 章で詳しく行う．

定理 1.25 $1 \leqq p \leqq \infty$ とし，E を $\mathbf{R}^d$ のルベーグ可測な部分集合とする．$f_n \in L^p(E)$ $(n=1,2,\cdots)$ が

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_n - f_m\|_{L^p(E)} = 0$$

を満たすならば，ある $f \in L^p(E)$ で

$$\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{L^p(E)} = 0$$

を満たすものが存在する．

証明　本書で必要な $1 \leqq p < \infty$ の場合を証明する．仮定より，$n_1 < n_2 < \cdots \to \infty$ を $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p(E)} < 1/2^k$ となるように選ぶことができる．

---

[14] [新井] 問題 9.1 とその解答参照．

まず，ある $f \in L^p(E)$ が存在し，$\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\|_{L^p(E)} = 0$ が成り立つことを示す.

$$F_N(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{N} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|$$

とおくと，$0 \leqq F_N(x) \leqq F_{N+1}(x)$ であるから，$F(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x)$ $(\leqq \infty)$ が存在する．したがって，単調収束定理より

$$\int_E F(x)^p\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_E F_N(x)^p\,dx = \lim_{N\to\infty} \|F_N\|_{L^p(E)}^p.$$

また，ミンコフスキーの不等式より

$$\begin{aligned}\|F_N\|_{L^p(E)} &\leqq \|f_{n_1}\|_{L^p(E)} + \sum_{k=1}^{N} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p(E)} \\ &< \|f_{n_1}\|_{L^p(E)} + \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \\ &= \|f_{n_1}\|_{L^p(E)} + 1 - 2^{-N}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_E F(x)^p\,dx \leqq \left(\|f_{n_1}\|_{L^p(E)} + 1\right)^p < \infty$$

である．したがって，ほとんどすべての $x \in E$ に対して $F(x) < \infty$ が得られる．ところで，複素数列は絶対収束していれば収束するので，$F(x) < \infty$ なる x に対して極限

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$$

が存在する．いま，このような点 x に対して

$$g_N(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$$

とおくと $\lim_{N\to\infty} g_N(x) = f(x)$ であり，$g_N(x) = f_{n_N}(x)$ である．また，$|f(x)|^p \leqq F(x)^p$ より $f \in L^p(E)$ であり，

$$|f(x) - g_N(x)|^p \leqq (|f(x)| + |g_N(x)|)^p \leqq 2^p F(x)^p$$

であるから，ルベーグの収束定理より

$$\lim_{N\to\infty} \int_E |f(x) - f_{n_N}(x)|^p\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_E |f(x) - g_N(x)|^p\,dx = 0$$

が成り立つ.

次に $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^p(E)} = 0$ を証明する．すでに示したことより，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 M が存在し，$N > M$ ならば $\|f - f_{n_N}\|_{L^p(E)} < \varepsilon$ である．また定理の仮定より，必要ならばさらに M を大きくとることにより，$N, n > M$ ならば $\|f_{n_N} - f_n\|_{L^p(E)} < \varepsilon$ が成り立つようにできる．ゆえに，$n > M$ であるとき，$N > M$

なる任意の N に対して

$$\|f-f_n\|_{L^p(E)} \leqq \|f-f_{n_N}\|_{L^p(E)} + \|f_{n_N}-f_n\|_{L^p(E)} < 2\varepsilon.$$

よって $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{L^p(E)}=0$ が証明された. □

$1 \leqq p < \infty$ の場合，一般に L^p ノルムで収束していても a.e. $x \in E$ で収束するとは限らない．しかし次のことが成り立つ．

系 1.26 $1 \leqq p < \infty$ とし，$f_n, f \in L^p(E)$ $(n=1,2,\cdots)$，$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^p(E)} = 0$ とする．このとき，ある部分列 $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ で，$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ を満たすものが存在する．

証明 前定理の証明中の部分列 f_{n_j} が求めるものであることが，証明の中で示されている． □

1.6.3 滑らかな関数による近似とその応用

ここでは，$\mathbf{R}^d$ 上の L^p 関数 $(1 \leqq p < \infty)$ の微分可能な関数による近似について述べる．

$$C(\mathbf{R}^d) = \{f : f \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ 上の連続な複素数値関数}\},$$

$$C^\infty(\mathbf{R}^d) = \{f : f \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ 上の無限回連続偏微分可能な複素数値関数}\}$$

とおく．$\mathbf{R}^d$ 上で定義された関数 $f(x)$ に対して $\{x \in \mathbf{R}^d : f(x) \neq 0\}$ の閉包を $\mathrm{supp}(f)$ と表し，f の**台**という．ある集合 $A \subset \mathbf{R}^d$ が**有界な集合**あるいは**有界集合**であるとは，$\sup_{x\in A}|x| < \infty$ となることである．

$$C_0(\mathbf{R}^d) = \{f \in C(\mathbf{R}^d) : \mathrm{supp}(f) \text{ は有界集合}\},$$

$$C_0^\infty(\mathbf{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^d) : \mathrm{supp}(f) \text{ は有界集合}\}$$

とおく[15]．次の補題は，$C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ に属する関数を構成するときに用いられる．

補題 1.27 U を $\mathbf{R}^d$ の開集合とし，K を $K \subset U$ を満たす有界な閉集合とする．$K \neq \emptyset$ を仮定する．このとき，次を満たす $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ が存在する．

(i) $\varphi(x) = 1$ $(x \in K)$

(ii) $\mathrm{supp}(\varphi) \subset U$

[15] $\mathrm{supp}(f)$ は閉集合であるから，$\mathrm{supp}(f)$ は有界な閉集合である．$\mathbf{R}^d$ においては有界な閉集合は位相空間論におけるコンパクト集合と同値である ([松坂] 参照)．そこで有界な台をもつ関数のことを通常は，**コンパクト台**をもつ関数という．

(iii) $0 \leqq \varphi(x) \leqq 1 \quad (x \in \mathbf{R}^d)$

証明

$$k(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqq 0) \\ e^{-1/t} & (t > 0) \end{cases}$$

と定める．このとき k は $\mathbf{R}$ 上の C^∞ 級関数である．いま，$x \in \mathbf{R}^d$ に対して，

$$H(x) = k(1 - |x|^2)$$

と定義し，

$$h(x) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} H(y)\,dy \right)^{-1} H(x)$$

とする．さらに $\varepsilon > 0$ に対して

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とおく．このとき $\mathrm{supp}(h_\varepsilon) \subset \left\{x \in \mathbf{R}^d : |x| \leqq \varepsilon\right\}$, $h_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $h_\varepsilon(x) \geqq 0 \ (x \in \mathbf{R}^d)$, かつ

$$\int_{\mathbf{R}^d} h_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^d} h(x)\,dx = 1$$

を満たす．さて，$x \in \mathbf{R}^d$ に対して $d(x, K) = \inf\{|x-y| : y \in K\}$ とし，

$$K_\varepsilon = \left\{x \in \mathbf{R}^d : d(x, K) \leqq \varepsilon\right\}$$

とおく．K は有界閉集合であるから，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$K_\varepsilon \subset U$ が成り立つ．

$$\varphi(x) = \int_{K_{\varepsilon/2}} h_{\varepsilon/2}(x-y)\,dy$$

とおく．このとき $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ である．$x \in K$ のとき，$y \notin K_{\varepsilon/2}$ であれば，$\varepsilon/2 < |x-y|$ より $h_{\varepsilon/2}(x-y) = 0$ である．ゆえに

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{K_{\varepsilon/2}} h_{\varepsilon/2}(x-y)\,dy = \int_{\mathbf{R}^d} h_{\varepsilon/2}(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} h_{\varepsilon/2}(y)\,dy = 1. \end{aligned}$$

ゆえに (i) が成り立つ．

次に，$x \notin U$ とすると，$d(x, K) > \varepsilon$ であるから，任意の $x' \in K$ に対して $|x - x'| \geqq d(x, K) > \varepsilon$ である．したがって，$y \in K_{\varepsilon/2}$ に対して，ある $x'' \in K$ が存在し，

$$|x-y| \geqq \left|x - x''\right| - \left|x'' - y\right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに $h_{\varepsilon/2}(x-y) = 0$ である．したがって $\varphi(x) = 0$ となり，(ii) が示せた．

(iii) は定義より明らかである． □

定理 1.28 $1 \leqq p \leqq q < \infty$ とし，$f \in L^p(\mathbf{R}^d) \cap L^q(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき，$f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_q = 0$$

を満たすものが存在する．

証明　p または q を r により表すことにする．

ステップ 1. まず $f(x)$ があるルベーグ可測集合 $E \subset \mathbf{R}^d$ の特性関数

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E) \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

の場合に示す．$f \in L^r(\mathbf{R}^d)$ より $m_d(E) < \infty$ である．ε を任意の正数とする．このときルベーグ測度の性質から，あるコンパクト集合 K と開集合 U で，$K \subset E \subset U$ かつ

$$m_d(U \setminus K) < 2^{-q}\varepsilon$$

なるものが存在する[16)]．ただしここで $U \setminus K = \{x \in E : x \notin E\}$ を表す．このとき補題 1.27 より，ある $\varphi_E \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で，$\varphi_E(x) = 1$ $(x \in K)$ かつ $\mathrm{supp}(\varphi_E) \subset U$ かつ $0 \leqq \varphi_E(x) \leqq 1$ $(x \in \mathbf{R}^d)$ を満たすものが存在する．

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} |f(x) - \varphi_E(x)|^r\,dx &= \int_{U\setminus K} |f(x) - \varphi_E(x)|^r\,dx \\ &\leqq 2^r m_d(U \setminus K) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

ステップ 2. 次に，$f(x)$ がルベーグ可測な非負値単関数の場合，すなわち

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}(x)$$

の場合を示す．ただしここで，$a_k > 0$ かつ E_k は互いに素な $\mathbf{R}^d$ のルベーグ可測な部分集合とする．このとき

$$\infty > \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^p\,dx = \sum_{k=1}^n a_k^p m_d(E_k)$$

より，すべての k に対して $m_d(E_k) < \infty$ となっている．$A = \max_k |a_k| + 1$ とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，上に示したことから，ある $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ を $\|\chi_{E_k} - \varphi_{E_k}\|_r < \varepsilon/(An)$，$r = p, q$ となるようにとれる．そこで

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{E_k}(x)$$

16) [伊藤] 定理 7.4, 定理 7.5，あるいは [新井] 系 6.14 と問題 3.5 を参照．

とする．$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ であり，

$$\|f-\varphi\|_r \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k \|\chi_{E_k} - \varphi_{E_k}\|_r < \varepsilon$$

が成り立つ．

ステップ 3．$f(x)$ が非負値関数の場合，ルベーグ可測な非負値単関数 $s_n(x)$ で，各 $x \in \mathbf{R}^d$ に対して

$$0 \leqq s_1(x) \leqq s_2(x) \leqq \cdots \leqq f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$$

を満たすものが存在する[17]．$|f(x)-s_n(x)|^r \leqq f(x)^r$ であるから，ルベーグの収束定理から

$$\lim_{n\to\infty} \|f-s_n\|_r = 0$$

が成り立っている．ステップ 2 より，ある $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ を $\|s_n-\varphi_n\|_r < 1/n$ となるようにとれる．このとき

$$\|f-\varphi_n\|_r \leqq \|f-s_n\|_r + \|s_n-\varphi_n\|_r \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

ステップ 4．$f(x)$ が実数値関数の場合には，$f_+(x) = \max(f(x),0)$，$f_-(x) = \max(-f(x),0)$ とすると $f = f_+ - f_-$ であり，各 f_+，f_- にステップ 3 を適用すればよい．$f(x)$ が複素数値の場合は，実部と虚部に分けて考えればよい． □

この定理を用いて次のことを示すことができる．

系 1.29 $1 \leqq p < \infty$ とする．f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ のルベーグ可測関数で，$[-\ell,\ell)$ 上で p 乗可積分であるとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，周期 2ℓ をもつような $h \in C^\infty(\mathbf{R})$ で，

$$\|f-h\|_{L^p([-\ell,\ell))} < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．

証明 $\varepsilon > 2^p\delta + \delta^p > 0$ を満たす $\delta > 0$ をとる．$F(x) = f(x)\chi_{[-\ell,\ell)}(x)$ とおく．定理 1.28 より，ある $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ で，$\|F-g\|_p < \delta$ なるものが存在する．このとき

$$\|f-g\|_{L^p([-\ell,\ell))} \leqq \|F-g\|_p < \delta$$

である．自然数 $n \geqq 2$ に対して

$$E_n = \left[-\ell\left(1-\frac{1}{n}\right), \ell\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

[17] 証明は [新井] 定理 7.12，あるいは [伊藤] 定理 10.1 を参照．

とおく．ルベーグの収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}|f(x)|^p\,dx=\int_{(-\ell,\ell)}|f(x)|^p\,dx=\int_{[-\ell,\ell)}|f(x)|^p\,dx<\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}|g(x)|^p\,dx=\int_{(-\ell,\ell)}|g(x)|^p\,dx=\int_{[-\ell,\ell)}|g(x)|^p\,dx<\infty.$$

ゆえに十分大きな n を

$$\int_{[-\ell,\ell)\setminus E_n}|f(x)|^p\,dx,\ \int_{[-\ell,\ell)\setminus E_n}|g(x)|^p\,dx<\delta$$

となるようにとれる．補題 1.27 より，ある $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ で，$\varphi(x)=1$ $(x\in E_n)$ かつ $\mathrm{supp}(\varphi)\subset\left(-\ell\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right),\ell\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$ かつ $0\leqq\varphi(x)\leqq 1$ $(x\in\mathbf{R})$ となるものが存在する．$\mathrm{supp}(\varphi g)\subset\left(-\ell\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right),\ell\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$ であるから，

$$h(x+2k\ell)=\varphi(x)g(x),\quad x\in[-\ell,\ell)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

とおくと，$h\in C^\infty(\mathbf{R})$ かつ h は周期 2ℓ をもつ．さらに，

$$\begin{aligned}\|f-h\|^p_{L^p([-\ell,\ell))}&=\int_{[-\ell,\ell)\setminus E_n}|f(x)-\varphi(x)g(x)|^p\,dx+\int_{E_n}|f(x)-g(x)|^p\,dx\\&<\int_{[-\ell,\ell)\setminus E_n}|f(x)-\varphi(x)g(x)|^p\,dx+\delta^p.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}&\left(\int_{[-\ell,\ell)\setminus E_n}|f(x)-\varphi(x)g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\&\qquad\leqq\left(\int_{[-\ell,\ell)\setminus E_n}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_{[-\ell,\ell)\setminus E_n}|g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\&\qquad<2\delta^{1/p}.\end{aligned}$$

以上より，

$$\|f-h\|^p_{L^p([-\ell,\ell))}<2^p\delta+\delta^p<\varepsilon.$$

□

系 1.30 $1\leqq p<\infty$ とする．$f\in L^p(\mathbf{R}^d)$ と $t\in\mathbf{R}^d$ に対して，

$$\tau_t(f)(x)=f(x-t)$$

とする．このとき

$$\|\tau_t(f)\|_p=\|f\|_p,\tag{1.11}$$

$$\lim_{|t|\to 0} \|\tau_t(f) - f\|_p = 0 \tag{1.12}$$

が成り立つ.

証明 (1.11) はルベーグ測度の平行移動不変性による[18].

(1.12) を証明する. 定理 1.28 より $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ に対して証明すれば十分である. $K = \mathrm{supp}(f)$ とし, $K' = \{x \in \mathbf{R}^d : d(x, K) \leqq 1\}$ とする ($d(x, K)$ の記号は補題 1.27 の証明を参照). K' も有界閉集合であるから, f は K' 上で一様連続である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 1 より十分小さな $\delta > 0$ が存在し, $t \in \mathbf{R}^d$ が $|t| < \delta$ を満たすならば

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{m_d(K')^{1/p}} \qquad (x \in K')$$

が成り立つ. したがって $|t| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} \|\tau_t(f) - f\|_p &= \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{K'} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leqq \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. □

1.6.4 リーマン・ルベーグの補題

ルベーグ積分はフーリエ解析にとって非常に強力な道具である. その一端を最後にみておこう. 系 1.4 では, $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数 f で, $[-\ell, \ell)$ 上で 2 乗可積分なものに対して,

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-inx} \, dx = 0$$

を証明した. ここではさらに次のような一般的な結果を証明する.

補題 1.31 (リーマン・ルベーグの補題) f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数で, $[-\ell, \ell)$ 上でルベーグ積分可能であるとする. このとき

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-itx} \, dx = 0$$

である.

---

[18] 詳細は [新井] 定理 11.12, あるいは [伊藤] 定理 12.7 を参照.

証明

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in[-\ell,\ell)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすると $F\in L^1(\mathbf{R})$ である．$t\neq 0$ とする．

$$\begin{aligned}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-itx}dx &= \int_{\mathbf{R}} F(x)e^{-itx}dx = -\int_{\mathbf{R}} F(x)e^{-i(tx+\pi)}dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}} F(x)e^{-it\left(x+\frac{\pi}{t}\right)}dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}} F\left(x-\frac{\pi}{t}\right)e^{-itx}dx.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}2\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-itx}dx &= 2\int_{\mathbf{R}} F(x)e^{-itx}dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} F(x)e^{-itx}dx - \int_{\mathbf{R}} F\left(x-\frac{\pi}{t}\right)e^{-itx}dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left\{F(x)-F\left(x-\frac{\pi}{t}\right)\right\}e^{-itx}dx.\end{aligned}$$

したがって，系 1.30 より $|t|\to\infty$ のとき

$$\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-itx}dx\right| \leqq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\left|F(x)-F\left(x-\frac{\pi}{t}\right)\right|dx\to 0$$

が成り立つ． □

課題 系 1.4 を使って定理 1.2 が証明された．補題 1.31 を用いて，定理 1.2 を次の定理のように一般化せよ．

定理 1.32 (ディニー・ルベーグの定理) f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の連続関数とする．もし，ある点 $x_0\in[-\ell,\ell)$ において，

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|dh<\infty$$

が，ある $\delta>0$ に対して成り立っているならば，

$$f(x_0)=\lim_{N\to\infty} s_N[f](x_0)$$

が成り立つ．

1.7 フーリエ級数の L^2 ノルム収束

本節では，ルベーグ積分のフーリエ級数論への応用として，$[-\ell,\ell)$ 上で 2 乗可積分な関数のフーリエ級数展開について述べる．これまでは関数に滑らかさ，あるいは区分的な滑らかさがある場合のフーリエ級数展開を主に扱ってきた．それらは，点 $x\in[-\ell,\ell)$ での収束に関するものであった．これに対して，ここでは各点で収束するかどうかではなく，$|f-s_N[f]|^2$ のグラフの面積

$$\varepsilon_N[f]=\int_{[-\ell,\ell)}|f(x)-s_N[f](x)|^2\,dx$$

が，$N\to\infty$ のときに 0 に収束するかどうかを考える．

$$\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N[f]=0$$

となるとき，f のフーリエ級数は f に**平均 2 乗収束**，あるいは **L^2 収束**しているという．本節での議論は，後述のヒルベルト空間の一般論の背景のひとつにもなっている．

次の定理が成り立つ．

定理 1.33 f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数で，$[-\ell,\ell)$ 上で 2 乗可積分であるとする．このとき

$$\lim_{N\to\infty}\int_{[-\ell,\ell)}|f(x)-s_N[f](x)|^2\,dx=0$$

である．

証明 任意の $\varepsilon>0$ をとる．このとき，系 1.29 より $g\in C^\infty(\mathbf{R})$ で，周期 2ℓ かつ

$$\left(\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}<\varepsilon$$

となるものが存在する．このとき，定理 1.11 より，十分大きな自然数 N_0 に対して $N\geqq N_0$ ならば

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|g(x)-s_N[g](x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\ell}}$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\ell}^{\ell}|g(x)-s_N[g](x)|^2\,dx\right)^{1/2}&\leqq\left(\sup_{x\in\mathbf{R}}|g(x)-s_N[g](x)|^2\int_{-\ell}^{\ell}dx\right)^{1/2}\\&\leqq\varepsilon.\end{aligned}$$

また，$s_N[g](x)-s_N[f](x)=s_N[g-f](x)$ であるから，ベッセルの不等式の証明中

の計算とベッセルの不等式より

$$\int_{-\ell}^{\ell} |s_N[g](x) - s_N[f](x)|^2 \, dx = \int_{-\ell}^{\ell} |s_N[g-f](x)|^2 \, dx$$
$$= 2\ell \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f-g)|^2$$
$$\leqq \int_{-\ell}^{\ell} |f(x) - g(x)|^2 \, dx$$
$$< \varepsilon^2$$

である．よって

$$\left(\int_{-\ell}^{\ell} |f(x) - s_N[f](x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$
$$\leqq \left(\int_{-\ell}^{\ell} |f(x) - g(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\ell}^{\ell} |g(x) - s_N[g](x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$
$$+ \left(\int_{-\ell}^{\ell} |s_N[g](x) - s_N[f](x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$
$$< 3\varepsilon.$$

□

この定理を用いると，ベッセルの不等式がじつは等式で成立することを示すことができる．

系 1.34 (パーセヴァルの等式) f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の関数で，$[-\ell, \ell)$ 上で 2 乗可積分であるとする．このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 \, dx$$

である．

証明 ベッセルの不等式の証明中の計算から

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x) - s_N[f](x)|^2 \, dx = -\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 + \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 \, dx$$

が得られる．ここで $N \to \infty$ とすれば，前定理より左辺が 0 に収束し，求める等式が導かれる． □

2章

フーリエ級数を使って微分方程式を解く

フーリエ級数を使って，微分方程式を解いてみよう．まずは，フーリエ級数論発祥の地である熱伝導の理論から，典型的な例題をとり上げてみたい．

2.1 熱方程式

例題 1 (熱方程式の初期値境界値問題) $c>0$ を定数とし，f を $(-\infty,\infty)$ 上の周期 2ℓ の C^∞ 級関数とする．このとき，偏微分方程式

$$c\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0 \qquad \bigl((x,t)\in(-\infty,\infty)\times(0,\infty)\bigr) \tag{2.1}$$

の解で，次の周期的境界条件

$$u(x,t)=u(x+2k\ell,t) \qquad (x\in[-\ell,\ell),\ 0<t<\infty,\ k\in\mathbf{Z}), \tag{2.2}$$

および初期値条件

$$u(x,0)=f(x) \qquad (x\in(-\infty,\infty)) \tag{2.3}$$

を満たすものを見いだせ． □

この方程式の数学的な解析をすることが目的であるが，簡単にその物理的な解釈も述べておこう．

物理的な解釈: 長さ 2ℓ の一様な細い棒を丸い輪にして作った円 Γ を考える．その表面は断熱され，また $c>0$ は，輪の熱伝導率，比熱，線密度から定まる熱拡散率という定数である．このとき，Γ 上の関数は周期 2ℓ の関数とみなすことができる．もし，$t=0$ のとき，x での温度が $f(x)$ で与えられているならば，時刻 $t>0$ における x での温度 $u(x,t)$ は，例題の微分方程式 (2.1) および条件 (2.2), (2.3) を満たしていると考えてもよいことが物理的な考察によって知られている．

問題を**変数分離法**という手法を使って解く．変数分離法とは，とりあえず解 $u(x,t)$ が

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.4}$$

という形であるとして，$X(x), T(t)$ を求めてしまおうというものである．まず，(2.4) を (2.1) に代入してみると，

$$cX''(x)T(t) - X(x)T'(t) = 0$$

である．したがって，もし u が (2.4) の形をしていれば，X, T は必ず

$$c\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

なる関係式を満たす．ここで左辺は x だけの関数であり，一方，右辺は t だけの関数である．このようなことがおこるのは，

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c^{-1}\frac{T'(t)}{T(t)} = K \qquad (K: \text{定数}) \tag{2.5}$$

なる場合に限られる．ここで次の三つの場合が考えられる:

$$\text{(i)} \quad K > 0, \qquad \text{(ii)} \quad K < 0, \qquad \text{(iii)} \quad K = 0.$$

まず (i) の場合を考えよう．この場合，常微分方程式 $X''(x) - KX(x) = 0$ の一般解は，

$$X(x) = Ae^{\sqrt{K}x} + Be^{-\sqrt{K}x}$$

である．しかし，$A = B = 0$ の場合を除いてこの関数は周期的ではないので，場合 (i) はありえない．また $K = 0$ の場合も X は多項式でなければならないので実数解以外を除外せざるをえない．したがって，$K < 0$ の場合について調べればよいことがわかる．この場合は，$X''(x) - KX(x) = 0$ の一般解は，次のようになることが知られている:

$$X(x) = A\cos\sqrt{-K}x + B\sin\sqrt{-K}x \qquad (A, B \text{ は任意定数}). \tag{2.6}$$

この関数が周期 2ℓ となるのは $\sqrt{-K} = n\pi/\ell$ の場合であるので，$K = K_n = -(n\pi/\ell)^2$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ のとき，(2.6) は解をつくる関数の候補になりうる．一方，このとき，$T' = cK_nT$ でなければならないので，$T(t) = Ce^{cK_nt}$ (C は任意定数) がその一般解となる．ゆえに，A_n, B_n を任意定数として

$$u_n(x,t) = e^{-cn^2\pi^2t/\ell^2}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x + B_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

が (2.1), (2.2) を満たす関数になっている．さらにもし，関数項級数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)$$

が項別微分をできるように収束しているならば，これも (2.1), (2.2) の解になっている．ところで，この解の $t=0$ の場合は

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+B_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

である．よって，A_n, B_n として f のフーリエ係数をとってくれば，u が (2.1), (2.2), (2.3) を満たす解の候補になっていることがわかる．そしてこれが実際に求める解になっていることを示すには，u を定義する関数項級数が 2 階項別微分可能であることを証明すればよいことは，いままでの考察から容易にわかる．

補題 2.1 $f\in C^{\infty}(\mathbf{R})$ が周期 2ℓ の関数であるとする．このとき

$$A_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{n\pi}{\ell}t\,dt,\qquad B_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}t\,dt$$

を係数とする級数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-cn^2\pi^2t/\ell^2}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+B_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

は，$[-\ell,\ell)\times[0,\infty)$ で何回でも項別微分可能である．

証明 $\omega=\pi/\ell$ とおく．部分積分により，

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\frac{1}{n\omega}(-\cos n\omega t)'\,dt=\left(\frac{1}{n\omega}\right)\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f'(t)\cos n\omega t\,dt\\&=\left(\frac{1}{n\omega}\right)\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f'(t)\left(\frac{1}{n\omega}\right)(\sin n\omega t)'\,dt\\&=-\left(\frac{1}{n\omega}\right)^2\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f''(t)\sin n\omega t\,dt\\&=\cdots.\end{aligned}$$

これより，任意の $N=1,2,\ldots$ に対して，

$$|B_n|\leqq c_N\frac{1}{n^N}\tag{2.7}$$

となる（c_N は n に依存しない定数）．ゆえに $\lambda_n^2=cn^2\pi^2/\ell^2$ とおくと

$$\left|B_ne^{-\lambda_n^2t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right|\leqq c_2\frac{1}{n^2}$$

である．また，(2.7) を使えば，任意の非負の整数 α, β に対して，N を十分大きくとれば

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} B_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right| \leqq c_{\alpha,\beta,N} \frac{1}{n^2}$$

($c_{\alpha,\beta,N}$ は x, t, n に依存しない定数) とできる．同様にして，A_n に対しても同じような不等式が得られる．よって，ワイエルシュトラスの優級数定理 (定理 1.10 参照) と項別微分定理 (定理 1.16 参照) から求めたい結果が得られる．　□

注意　12 章で，一般的なヒルベルト空間の枠組みで解の一意性が証明してある．

2.2 電気回路の微分方程式

本節では次の問題を考える．

例題 2 (電気回路に関する微分方程式)　L, R, c を正定数，v を $\mathbf{R}$ 上の周期 2ℓ の C^∞ 級関数とする．このとき，

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = v(t) \tag{2.8}$$

を満たす $\mathbf{R}$ 上の関数 $q(t)$ を求めよ．　□

物理的解釈:　図 2.1 のような電気回路を考え，電圧源を $v(t)$ とする．このとき，キャパシタに蓄えられる電荷 $q(t)$ の満たす微分方程式が (2.8) である．また，回路を流れる電流 $i(t)$ は dq/dt で与えられることも知られている．したがって，微分方程式 (2.8) を解くことのひとつの解釈は，$v(t)$ が与えられたとき，それによって生じる電荷 $q(t)$ あるいは電流 $i(t)$ を求めていることになる．

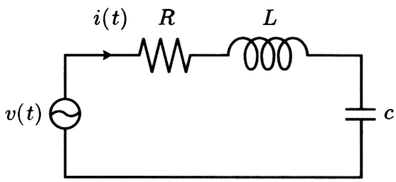


図 2.1　電 気 回 路

$\mathbf{R}$ 上の C^∞ 級関数 $q(t)$ に対して，

$$T[q](t) = L\frac{d^2q}{dt^2}(t) + R\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{c}q(t)$$

とおく．$\omega = \pi/\ell$ とし，$T[\,]$ の中に関数 $e^{ik\omega t}$ $(k \in \mathbf{Z})$ を入れてみる．すると，

$$T[e^{ik\omega\cdot}](t) = \left(-k^2\omega^2 L + ik\omega R + \frac{1}{c}\right) e^{ik\omega t}.$$

いい換えれば，

$$\lambda_k = \frac{1}{c} - k^2\omega^2 L + ik\omega R, \qquad e_k(t) = e^{ik\omega t}$$

とおくと，

$$T[e_k] = \lambda_k e_k \tag{2.9}$$

となっている．

ところで，定理 1.11 より関数 $v(t)$ は，$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(v) e_k(t)$ とフーリエ級数展開できている．したがって

$$T\left[\sum_k \alpha_k e_k\right] = \sum_k \alpha_k \lambda_k e_k = \sum_k c_k(v) e_k$$

となるように α_k を選べば，問題の微分方程式の解のひとつを得ることができる．実際，$\alpha_k = c_k(v)/\lambda_k$ とすれば，$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\omega t}$ が求める周期 2ℓ の解のひとつである．

この他に，$T[q](t) = 0$ を満たす $q(t)$ も考えてみよう．常微分方程式論で知られているように，この方程式は，A, B を任意定数とする一般解 $q(t, A, B)$ をもつ．したがって，上で求めた周期解 $q(t)$ と $q(t, A, B)$ を加えた $q(t) + q(t, A, B)$ が方程式 (2.8) の一般解である．$q(t, A, B)$ を具体的に求めることは，本書の主題からはずれるので省略するが，$q(t, A, B)$ は時間 t とともに減少することが知られている．これは**減衰振動**とよばれている．

2.3　線形作用素 (微分方程式が解けるからくり)

以上述べてきた微分方程式以外にも，フーリエ級数を使って解けるものはいろいろある．しかし，ここではそういった例を列挙することはせず，どうしてフーリエ級数を使って微分方程式が解けるのかを考えることにしよう．そのため，線形作用素の考え方を用いる．作用素とは，比喩的にいえば，図 2.2 のように入力端子と出力端子をもつ箱のようなものである．

これに関数を入力すると，その関数は箱の中で処理されて，出力端子から別

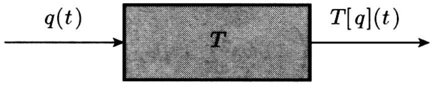


図 2.2 作 用 素

の関数となって出力されてくるのである．たとえば，前節の電気回路の微分方程式は，電荷 $q(t)$ を入力すると，電圧 $v(t)$ が出力されるひとつの作用素とみなすことができる．こういった作用素の中で，線形作用素は次のように定義される．入力 $q(t)$ に対して関数 $v(t)$ を対応させる写像を T とおく．T が線形作用素であるとは，関数 $q_1(t), q_2(t)$ を入力したとき，それぞれの出力が $T[q_1](t)$, $T[q_2](t)$ であるとすると，q_1 と q_2 を重ね合わせた $q_1(t)+q_2(t)$ のデータを入力したとき $T[q_1](t)+T[q_2](t)$ が出力され，また $q(t)$ を実数 α 倍して増幅した $\alpha q(t)$ に対しては $\alpha T[q](t)$ が出力されることである．すなわち，

$$T[q_1+q_2](t) = T[q_1](t) + T[q_2](t), \tag{2.10}$$

$$T[\alpha q](t) = \alpha T[q](t) \tag{2.11}$$

が成り立つことである．以下では，線形作用素の数学的な解析をしやすくするため，条件 (2.11) を少しゆるめて，α として実数だけでなく複素数に対しても (2.11) が成り立つとしておく．

線形作用素 T に対して興味ある問題は，$v(t)$ が出力されたとき $T[q](t) = v(t)$ となるような入力 $q(t)$ を求めることである．これは電気回路の方程式を例にとっていえば，電圧源 $v(t)$ が与えられたときに，電荷 $q(t)$ を求めることにほかならない．

この問題の場合に，フーリエ級数が有効であったのはなぜだろうか．フーリエ級数を使った解き方をもう一度ふりかえってみよう．まず，

$$T[e^{ik\omega t}] = \lambda_k e^{ik\omega t} \tag{2.12}$$

であることに注意し，このことから v のフーリエ級数展開 $\sum_k c_k(v)e^{ik\omega t}$ を使って

$$q(t) = \sum_k \lambda_k^{-1} c_k(v) e^{ik\omega t}$$

が求める解のひとつであることを示したのである．すなわち，フーリエ級数が微分方程式を解くのに優れている理由は，関数 $e^{ik\omega t}$ を T に入力すると

$e^{ik\omega t}$ が単に定数倍されて出力されるという際だった性質 (2.12) に帰因していることがわかる．熱方程式の場合も，$T[X] = X''$ という線形作用素に対して，$T[X](x) = KX(x)$ となる X が (2.6) で与えられることが，フーリエ級数を使って解けた理由になっている．つまり，線形作用素 T に対して $T[e^{ik\omega t}] = d_k e^{ik\omega t}$ (d_k は定数) が成り立っているとき，与えられた周期 2ℓ の関数 v に対して，$T[q] = v$ を満たす q のひとつをフーリエ級数を使って求めることができるのである．

ところで，このような考え方はなにも $e^{ik\omega t}$ の形の関数に限る必要はない．要するに，出力として入力の実数倍 (複素数倍) が得られるようなものならば，Fourier の考え方を適用できるのである (正確には，あとで学ぶ正規直交基底であることも加味しなければならない)．実際，$T[e^{ik\omega t}] = \lambda_k e^{ik\omega t}$ が成り立つような線形作用素は限られたものであるから，より多くの線形作用素に Fourier の考え方を適用するためには，$e^{ik\omega t}$ 以外の関数についても考察しなければならない．

Fourier の考え方の基盤となる入力，すなわち

$$T[v](t) = av(t) \qquad (t \in \mathbf{R}) \tag{2.13}$$

が成り立つような v を T の**固有関数**[1]という．そして a を T の**固有値**といい，T に対して (2.13) を満たす v, a を求めることを，T の**固有値問題**という．線形作用素，固有値，固有関数に関しては，Part III でより一般的な立場から学ぶ．

注意 フーリエ級数を使った微分方程式の解法に慣れることは重要なことである．本書ではあまり立ち入らないので，興味ある読者は [スウ] などで研鑽をつまれるとよいだろう．

[1] より厳密な定義はあとで学ぶ．

3章

フーリエ変換

フーリエ級数展開は周期関数を解析するための強力な方法のひとつであったが，本章では，周期を必ずしももち合わせていない関数について考察をすすめたい．このような関数に関するフーリエ解析は，現在では，解析学の基本的な道具のひとつとして使われている．

3.1 フーリエ変換の導出

周期 $2L$ の関数は関数系 $\{e^{ik\omega x} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ (ただし，$\omega = \pi/L$) によって展開することができた．しかし，周期をもつとは限らない関数を展開するにはこれだけの関数ではたりず，もっとたくさんの関数が必要になる．その辺の状況から説明していこう．

はじめに，周期をもつとは限らない $\mathbf{R}$ 上の関数 f を考える．この関数を周期 ∞ の関数とみなして話しを進めることにする．より正確にいえば，関数 f を区間 $[-L, L)$ 上でフーリエ展開し，次に $L \to \infty$ とするのである．このとき，フーリエ級数展開は L に応じて変化していくが，その変化の終着点が周期をもたない関数のフーリエ展開といえるものなのである．

数学的な厳密性には目をつぶり，このときおこるフーリエ級数展開の変化の様子を眺めてみることにしよう．まず，$[-L, L)$ でのフーリエ級数展開は次のようになる:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{L,k} e^{i\pi kx/L}, \qquad c_{L,k} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\pi ky/L} dy.$$

ここで $\Delta\xi = \pi/L$, $\xi_k = k\pi/L$ とおき，上式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2Lc_{L,k} e^{i\xi_k x}\Delta\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\xi_k y}\, dy\right\} e^{i\xi_k x}\Delta\xi \end{aligned}$$

となる．ここで，$L \to \infty$ とすれば $|\Delta\xi| \to 0$ であり，リーマン積分の定義を思い起こせば，形式的に

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \right\} e^{i\xi x}\, d\xi \tag{3.1}$$

が得られる．この式の右辺の二番目の積分を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy$$

とおく．$\mathcal{F}[f]$ を f の**フーリエ変換**という．このフーリエ変換の記号を使って (3.1) を書き表すと

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \tag{3.2}$$

となる．これが，周期をもたない関数に対するフーリエ展開とみなせるものである．

さて，これをすでに学んだ周期関数のフーリエ級数展開と比較してみよう．周期関数のフーリエ級数展開はいままで学んできたように

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega x}$$

であった．いい換えれば，f は可算無限個の $\{e^{ik\omega x}\}_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ を重ね合わせて表現できており，そして各 $e^{ik\omega x}$ をどのくらい重ねればよいかがフーリエ係数 $c_k(f)$ によって表されているのである．これに対して (3.2) では，可算無限個よりたくさんの (連続無限個の) $\{e^{i\xi x}\}_{\xi \in \mathbf{R}}$ を，積分によって加え合わせている．このように比較してみると，フーリエ変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$ は，f を $\{e^{i\xi x}\}_{\xi \in \mathbf{R}}$ により展開したときに $e^{i\xi x}$ がどのくらい多く重ね合わされているかを表す量であるといえる．

本章では，このフーリエ変換について詳しく述べていきたい．また，それと同時にフーリエ逆変換についても述べる．なお，フーリエ逆変換とは，(3.1) の右辺の二番目の積分のことで，次のように定義される写像である:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

形式的な議論で得た式 (3.2) をフーリエ逆変換を使って書き改めると

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right](x) \tag{3.3}$$

となる．このことから $\mathcal{F}^{-1}$ をフーリエ逆変換とよぶ理由は理解できることと

思う．

ところで，数学的にはフーリエ変換を d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ 上の関数に対しても定義しておいたほうが応用範囲が広がる．いままでの 1 次元の話から類推して，d 次元のフーリエ変換を定義しておこう．$\mathbf{R}^d$ 上のルベーグ可積分関数 f に対して，**フーリエ変換**と**フーリエ逆変換**は次で定義される：

d 次元フーリエ変換とフーリエ逆変換

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx \qquad (\xi \in \mathbf{R}^d), \tag{3.4}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} f(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \qquad (x \in \mathbf{R}^d). \tag{3.5}$$

ただし，$x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbf{R}^d$ に対して $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{d} x_j\xi_j$ とする．

なお，f のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$ を簡単に $\widehat{f}(\xi)$ と書いている本も多い．記号の簡略化のためにはよいのだが，複雑な関数のフーリエ変換の記述にはわかりやすくないところもあるというのが筆者の印象である．**本書では，$\mathcal{F}[f](\xi)$ と $\widehat{f}(\xi)$ を併用し，わかりやすいと思われるほうを適宜使うことにしたい．**

3.2 多重指数について

多変数関数のフーリエ変換の解析を行うには，多変数の微分積分が必要である．その際，多変数であるということからくる記号の煩雑さを避けるため多重指数の記法が便利である．本節ではそれを学んでおこう．

$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とし，$\mathbf{Z}_+^d = \mathbf{Z}_+ \times \cdots \times \mathbf{Z}_+$ (d 重の直積) とする．このとき，$\mathbf{Z}_+^d$ の元を**多重指数**という．

$\mathbf{Z}_+^d \ni \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ に対して，

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_d + \beta_d), \qquad \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_d - \beta_d)$$

と表すことにする．また，

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$$

と表す ($\mathbf{R}^n \ni x$ の長さも同じ記号 $|x|$ で表しているので，混同しないようにし

てほしい). さらに, $\beta \leqq \alpha$ という記号により, $\beta_1 \leqq \alpha_1$ かつ $\beta_2 \leqq \alpha_2$ かつ ... かつ $\beta_d \leqq \alpha_d$, を表すことにする. そして, $\beta \leqq \alpha$ のとき,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}, \qquad \binom{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\alpha_k!}{(\alpha_k - \beta_k)!\beta_k!}$$

とする. また, d 変数の関数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ に対して,

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} f$$

とおく. ただし, $\alpha_j = 0$ の場合は x_j に関しては微分をしないことを意味するものとする. さらに, $x = (x_1, \dots, x_d)$ に対して $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ とする. ただし, $0^0 = 1$ とみなす.

以下では, 非負の整数 k に対して,

$$C^k(\mathbf{R}^d) = \left\{ f : \begin{array}{l} \text{任意の } \alpha \in \mathbf{Z}_+^d \ (|\alpha| \leqq k) \text{ に対して,} \\ f \text{ は } \alpha \text{ 次の連続な偏導関数 } \partial^\alpha f \text{ をもつ.} \end{array} \right\}$$

と表す. $C^k(\mathbf{R}^d)$ に属する関数を $\mathbf{R}^d$ 上の C^k 級関数という.

$$C^\infty(\mathbf{R}^d) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\mathbf{R}^d)$$

である.

これらの多重指数を使うと, たとえば, ライプニッツの公式は 1 変数と同じように書くことができるので, 記憶しやすくなる.

ライプニッツの公式 $\quad \partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha - \beta} g.$

d 変数関数に関するテイラーの公式も, 次のように簡単に記述できる: $\mathbf{R}^d \ni x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$, $s, t \in \mathbf{R}$ に対して

$$sx + ty = (sx_1 + ty_1, \dots, sx_d + ty_d)$$

と表す. f を $\mathbf{R}^d$ 上の C^N 級関数とすると,

テイラーの公式 $\quad f(x+y)$

$$= \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) y^\alpha + N \sum_{|\beta| = N} \frac{y^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} [\partial^\beta f](x + ty)\, dt.$$

なお，フーリエ解析では，∂^α よりも

$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d} = \frac{1}{i^{|\alpha|}}\partial^\alpha$$

という微分演算子を使うことが多い.

3.3 急減少関数空間

ある関数をフーリエ変換した場合，注意すべきことがある．それはフーリエ変換をすると関数のもつ性質が大きく変化してしまうことである．たとえば，f が $\mathbf{R}^d$ 上で可積分であっても，フーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ は必ずしも可積分とは限らない.

L. Schwartz は，フーリエ変換をしても変わらない関数の性質として，“急減少” という概念を導入した．つまり，急減少関数をフーリエ変換してもそれはまた急減少関数になっているのである．急減少関数はフーリエ解析学の基本であるから，本章で十分なじんでおいてもらいたい.

まず急減少関数の定義からはじめよう．$\mathbf{R}^d$ 上の関数 f が急減少であるとは，f および f のすべての導関数が，$|x| \to +\infty$ のとき，どのような自然数 N に対しても $|x|^{-N}$ より速く 0 に収束することである．厳密に述べると次のようになる.

定義 3.1 $\mathbf{R}^d$ 上の関数 f が次の (i), (ii) を満たすとき**急減少**であるという:

(i) $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$.

(ii) 任意の $N \in \mathbf{Z}_+$ に対し，

$$|f|_N = \sum_{|\alpha|+k \leqq N} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} (1+|x|)^k |\partial^\alpha f(x)|$$

とおくと，$|f|_N < \infty$ である.

以下では，$\mathbf{R}^d$ 上の急減少関数全体のなす集合を $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ と表すことにする.

注意 1 $|f|_N < \infty$ ならば，$|\alpha| + k \leqq N$ なる $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$, $k \in \mathbf{Z}_+$ に対して

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqq c\frac{1}{(1+|x|)^k} \qquad (x \in \mathbf{R}^d) \tag{3.6}$$

なる定数 $c < \infty$ が存在する.

注意 2 急減少関数の定義にはいくつかの同値なものがある．以下にそれを述べておこう.

$f \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ と $N \in \mathbf{Z}_+$ に対して,

$$|f|'_N = \sum_{\substack{|\alpha|+k \leqq N \\ \alpha \in \mathbf{Z}_+^d,\, k \in \mathbf{Z}_+}} \sup_{x \in \mathbf{R}^d} (1+|x|^2)^{k/2} |\partial^\alpha f(x)|$$

とおく. $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ とする. このとき, 次の (i), (ii), (iii) は互いに同値である.

(i) f は急減少関数である.

(ii) 任意の $N \in \mathbf{Z}_+$ に対して, $|f|'_N < \infty$.

(iii) 任意の α, $\beta \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して, $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \left|x^\beta \partial^\alpha f(x)\right| < \infty$.

証明 まず (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) を示す. $x \in \mathbf{R}^d$ に対して $1+|x|^2 \leqq (1+|x|)^2 \leqq 2\left(1+|x|^2\right)$ であるから

$$\left(1+|x|^2\right)^{k/2} \leqq (1+|x|)^k \leqq 2^{k/2}\left(1+|x|^2\right)^{k/2}.$$

ゆえに

$$|f|'_N \leqq |f|_N \leqq 2^{N/2} |f|'_N$$

である. このことから (ii) $\Longleftrightarrow$ 定義 3.1 (ii) が得られ, (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) が示される.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかである. (ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示す.

$$\left|x^\beta\right|^2 = \left|x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d}\right|^2 = x_1^{2\beta_1} \cdots x_d^{2\beta_d} \leqq \left(1+|x|^2\right)^{\beta_1} \cdots \left(1+|x|^2\right)^{\beta_d}$$

より

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \left|x^\beta \partial^\alpha f(x)\right| \leqq \sup_{x \in \mathbf{R}^d} (1+|x|^2)^{|\beta|/2} |\partial^\alpha f(x)| \leqq |f|'_{|\alpha|+|\beta|} < \infty$$

である. □

急減少関数の代表的な例を二つあげておく.

▶ **例 1** $C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である.

証明 $|x| \geqq R > 0$ のとき $f(x) = 0$ であるとする. 任意の $k \in \mathbf{Z}_+$ と $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して, $(1+|x|)^k |\partial^\alpha f(x)| = 0$ $(|x| > R)$ である. また, $(1+|x|)^k |\partial^\alpha f(x)|$ は有界閉集合 $\{x \in \mathbf{R}^d : |x| \leqq R\}$ 上の連続関数であるから, ある定数 $M_{\alpha,k} < \infty$ が存在し,

$$(1+|x|)^k |\partial^\alpha f(x)| \leqq M_{\alpha,k} < \infty \qquad (|x| \leqq R).$$

よって任意の $N \in \mathbf{Z}_+$ に対し, $|f|_N < \infty$ となる. □

▶ **例 2** $a > 0$ とし $f(x) = e^{-a|x|^2}$ とする. このとき, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である. この f はガウス関数とよばれているものである.

証明 $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ は明らか. 任意の $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して,

$$\partial^\alpha f(x) = P_\alpha(x) e^{-a|x|^2}$$

(ただし $P_\alpha(x)$ は x の $|\alpha|$ 次の多項式) と書くことができる．ここで

$$|P_\alpha(x)| \leqq C_\alpha(1+|x|)^{|\alpha|} \qquad (x \in \mathbf{R}^d)$$

なる定数 $C_\alpha < \infty$ をとることができる．したがって，任意の $k \in \mathbf{Z}_+$ に対して

$$(1+|x|)^k|\partial^\alpha f(x)| \leqq C_\alpha(1+|x|)^{|\alpha|+k}e^{-a|x|^2}$$

であるが，明らかに，

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d}(1+|x|)^{|\alpha|+k}e^{-a|x|^2} < \infty$$

である．ゆえに，任意の N に対して，$|f|_N < \infty$ である． □

例 2 の f はコンパクトな台をもっていないので，

$$C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subsetneqq \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$$

であることがわかる．また，$f(x)=1$ $(x \in \mathbf{R}^d)$ は，$f \notin \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であるから，

$$C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subsetneqq \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subsetneqq C^\infty(\mathbf{R}^d)$$

もわかる．

次に，急減少関数がすべての $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して p 乗可積分になることを示す．

補題 3.1 $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset L^p(\mathbf{R}^d)$ である．

証明 $p=\infty$ の場合は明らかであるから，$1 \leqq p < \infty$ の場合を証明する．$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする．

$$\int_{\mathbf{R}^d}|f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbf{R}^d}(1+|x|)^{-pk}\left|(1+|x|)^k f(x)\right|^p dx$$
$$\leqq |f|_k^p\int_{\mathbf{R}^d}(1+|x|)^{-pk}\,dx.$$

ここで，$x \in \mathbf{R}^d$ を極座標表示[1]する．すなわち $x = r\zeta$ $(0<r<\infty,\ \zeta \in S = \{x \in \mathbf{R}^d : |x|=1\})$ と表す．すると

$$\int_{\mathbf{R}^d}(1+|x|)^{-pk}\,dx = \int_0^\infty\left(\int_S(1+r)^{-pk}d\zeta\right)r^{d-1}\,dr$$
$$= c_d\int_0^\infty(1+r)^{-pk}r^{d-1}\,dr \qquad (c_d \text{ は } S \text{ の表面積})$$
$$= c_d\int_0^1(1+r)^{-pk}r^{d-1}\,dr + c_d\int_1^\infty(1+r)^{-pk}r^{d-1}\,dr.$$

---

[1] 極座標に関しては，7.2 節に簡単な説明をしてあるので参考にしてもらいたい．

第一項は明らかに有限である．第二項は，$d-pk<0$ のとき

$$\int_1^\infty (1+r)^{-pk} r^{d-1}\,dr \leqq \int_1^\infty r^{d-1-pk}\,dr < \infty$$

となる．したがって，$k>d/p$ とすれば $\|f\|_p \leqq c_{p,d}|f|_k < \infty$ である． □

次の部分積分の公式は，フーリエ解析学および次章で学ぶ超関数論で本質的な役割を果たす．

定理 3.2 f を $\mathbf{R}^d$ 上の無限回連続微分可能な関数で，すべての偏導関数 $\partial^\beta f$ が有界，すなわち $\sup_{x\in\mathbf{R}^d} |\partial^\beta f(x)| < \infty$ であるとする．このとき，$g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ と $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して，次の等式が成り立つ:

$$\int_{\mathbf{R}^d} (D^\alpha f(x))\, g(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\,(D^\alpha g(x))\,dx.$$

ただし，上の積分が定義できる理由は，補題 3.1 により $g,\ D^\alpha g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ であり，しかも $f,\ D^\alpha f$ が有界であるから $(D^\alpha f)g,\ fD^\alpha g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ となることによる．

証明 $d=1, \alpha=1$ の場合からはじめる．任意の $M>0$ に対して，部分積分の公式より

$$\int_{-M}^{M} f'(x)g(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_{-M}^{M} - \int_{-M}^{M} f(x)g'(x)\,dx$$

である．ここで $M\to\infty$ とすると，$g\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ より $g(\pm M)\to 0\ (M\to\infty)$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)\,dx$$

である．ゆえに，$d=1, \alpha=1$ の場合に定理は証明された．$\alpha=2$ の場合は f' と g に対していまの議論を繰り返せばよい．一般の α に対しても同様である．

$d\geqq 2$ の場合は，$[-M,M]\times\cdots\times[-M,M]$ 上で $(D^\alpha f(x))g(x)$ を積分し，各変数ごとに部分積分をして，$M\to\infty$ とすれば求める結果が得られる． □

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ を基礎にしてフーリエ変換のもつ性質を述べていこう．$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ は $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ に比べるとフーリエ変換との相性が断然よい．たとえば本書では証明しないが，$f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ であっても $f\equiv 0$ の場合を除けば $\mathcal{F}[f]\notin C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ となってしまうことが知られている．しかし，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の場合は次のことが証明できる．

定理 3.3 $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ならば，$\mathcal{F}[f],\ \mathcal{F}^{-1}[f]\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である．

この定理の証明に使う補題を準備しておく.

補題 3.4 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とすると，次の (1), (2) が成り立つ.

(1) 任意の $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して，$\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

(2) x の任意の多項式 $p(x)$ に対して，$pf \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

証明 (1) $N \in \mathbf{Z}_+$ とする．このとき $|\cdot|_N$ の定義から，

$$|\partial^\alpha f|_N \leqq |f|_{N+|\alpha|} < \infty. \tag{3.7}$$

(2) $p(x)$ の次数を K 次とする．$p(x) = \sum_{|\beta| \leqq K} a_\beta x^\beta$ とおく．このとき，

$$\partial^\alpha(pf) = \sum_{|\beta| \leqq K} a_\beta \partial^\alpha(x^\beta f) = \sum_{|\beta| \leqq K} a_\beta \sum_{\gamma \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma x^\beta \cdot \partial^{\alpha-\gamma} f.$$

ゆえに，

$$|\partial^\alpha(pf)| \leqq C(1+|x|)^K \sum_{|\alpha'| \leqq |\alpha|} |\partial^{\alpha'} f(x)| \qquad (x \in \mathbf{R}^d)$$

なる定数 C $(< \infty)$ をとることができる．したがって，

$$(1+|x|)^k |\partial^\alpha(pf)| \leqq C(1+|x|)^{K+k} \sum_{|\alpha'| \leqq |\alpha|} |\partial^{\alpha'} f(x)|$$

となる．よって，

$$|pf|_N \leqq C'|f|_{N+K} \quad (< \infty) \tag{3.8}$$

を満たす定数 C' $(< \infty)$ をとることができる. □

定理 3.3 の証明 $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ を証明する．$\mathcal{F}^{-1}[f] \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の証明も同様にできる．$k \geqq 0$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ とする．このとき，

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^d} (1+|\xi|)^k |\partial^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)| < \infty$$

を示せばよい．$\partial^\alpha \mathcal{F}[f]$ は次のようになる:

$$\partial^\alpha \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} (\partial^\alpha e^{-ix\cdot\xi}) f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} (-ix)^\alpha f(x)\,dx.$$

ここで，$F(x) = (-ix)^\alpha f(x)$ とおくと，補題 3.4 (2) より，$F \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である．また，$1+|\xi| \leqq 2(1+|\xi|^2)$ であるから，定理を証明するには

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^k |\widehat{F}(\xi)| < \infty$$

を示せば十分であることがわかる．Δ を $\mathbf{R}^d$ 上のラプラス作用素，すなわち

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \tag{3.9}$$

とおく．特に Δ が x 変数に作用することを強調したいときには Δ を Δ_x で表す．I を恒等写像 ($I(f)=f$ なる写像) とすると，部分積分の公式 (定理 3.2) により，次を示すことができる:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(I-\Delta_x)F](\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\{(I-\Delta_x)F(x)\}\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\{(I-\Delta_x)e^{-ix\cdot\xi}\}\cdot F(x)\,dx \\ &= (1+|\xi|^2)\int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}F(x)\,dx = (1+|\xi|^2)\mathcal{F}[F](\xi).\end{aligned}$$

さらにこの操作を繰り返して，帰納的に

$$\mathcal{F}[(I-\Delta_x)^k F](\xi) = (1+|\xi|^2)^k \widehat{F}(\xi)$$

を得る．結局，$G(x)=(I-\Delta_x)^k F(x)$ とおいたとき，

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^d}|\mathcal{F}[G](\xi)|<\infty$$

を示せばよいことがわかった．ところが補題 3.1 より，$G\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)\subset L^1(\mathbf{R}^d)$ であるから，

$$|\mathcal{F}[G](\xi)| \leqq \int_{\mathbf{R}^d}|e^{-ix\cdot\xi}G(x)|\,dx = \int_{\mathbf{R}^d}|G(x)|\,dx<\infty.$$

よって，定理 3.3 が証明された． □

定理 3.3 の証明から次のことがわかる．

命題 3.5 任意の $N\geqq 0$ に対して，d と N にのみ依存した正定数 $C_{d,N}$ が存在し，

$$|\mathcal{F}[f]|_N \leqq C_{d,N}|f|_{d+1+2N} \qquad (f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)) \tag{3.10}$$

である (この不等式は超関数に対してフーリエ変換を定義するときに使う)．

証明 F, G は前定理の証明で定めたものとする．すでに次の不等式は証明済みである:

$$\|G\|_1 \leqq C''|G|_{d+1} \qquad (\text{補題 3.1 の証明参照}),$$
$$|G|_{d+1} \leqq C'|F|_{d+1+2k} \qquad (\text{補題 3.4 の証明参照}),$$
$$|F|_{d+1+2k} \leqq C|f|_{d+1+2k+|\alpha|} \qquad (\text{補題 3.4 の証明参照}).$$

したがって，前定理の証明より

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}[f]|_N &\leqq \sum_{|\alpha|+k\leqq N}\sup(1+|\xi|^2)^k|\partial^\alpha\mathcal{F}[f](\xi)| \\ &\leqq C'_{d,N}\sum_{|\alpha|+k\leqq N}|f|_{d+1+2k+|\alpha|} \leqq C_{d,N}|f|_{d+1+2N}\end{aligned}$$

(ただし $C'_{d,N}$ は d, N にのみ依存した正定数) が得られる. □

3.4 フーリエ変換の性質

本節ではフーリエ変換のもつ基礎的な性質を学ぶ. ここにあげる性質は, フーリエ解析のもっとも重要な基礎事項である.

3.4.1 変数変換

初等幾何的な変数変換——すなわち平行移動と拡大・縮小——がフーリエ変換にどのような影響を及ぼすかを調べてみよう.

平行移動: $h \in \mathbf{R}^d$ に対して, 平行移動は次のように定義される:

$$\tau_h : \mathbf{R}^d \ni x \longmapsto x - h \in \mathbf{R}^d.$$

拡大・縮小: $t > 0$ に対して, 拡大・縮小は次のものである:

$$d_t : \mathbf{R}^d \ni x \longmapsto tx = (tx_1, \ldots, tx_d) \in \mathbf{R}^d.$$

反　転: $\mathbf{R}^d$ 上の関数 f に対して次のように定める:

$$f^\vee(x) := f(-x).$$

まず, 次のことは容易に証明できる.

定理 3.6 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする. このとき, $f \circ \tau_h$, $f \circ d_t$, $f^\vee \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であり, 次の (1)–(3) が成り立つ:

(1) $$\mathcal{F}[f \circ \tau_h](\xi) = e^{-ih\cdot\xi}\mathcal{F}[f](\xi),$$

(2) $$\mathcal{F}[f \circ d_t](\xi) = \frac{1}{t^d}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{t}\right),$$

(3) $$\mathcal{F}[f^\vee](\xi) = \mathcal{F}[f]^\vee(\xi) = (2\pi)^d\mathcal{F}^{-1}[f](\xi).$$

証明 $f \circ \tau_h$, $f \circ d_t$, $f^\vee \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ は明らかであるので, (1) の証明からはじめる.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f \circ \tau_h](\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x-h)\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x+h)\cdot\xi} f(x)\,dx = e^{-ih\cdot\xi}\mathcal{F}[f](\xi).\end{aligned}$$

(2) 変数変換 $y = tx$ により次を得る:

$$\mathcal{F}[f \circ d_t](\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(tx)\, dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\frac{1}{t}y\cdot\xi} f(y) t^{-d}\, dy = t^{-d}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{t}\right).$$

(3) は簡単な変数変換によって得られるので証明を略す.　□

3.4.2　ガウス関数のフーリエ変換

ガウス関数は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に属する関数の典型的な例のひとつであることをすでに示した. じつは, ガウス関数はフーリエ変換しても, ガウス関数の定数倍になるだけという際だった性質をもっている. このことを証明しておこう. まず, 1 次元の場合のガウス関数 $e^{-|x|^2/2}$ からはじめよう.

$f(x) = e^{-|x|^2/2}$ とする. 定義より

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 - ix\cdot\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx \cdot e^{-\xi^2/2}$$

である. ここで, $e^{-z^2/2}$ が $\mathbf{C}$ 上の正則関数であることに注意して, R, $R+i\xi$, $-R+i\xi$, $-R$, R の順に線分で結んだ長方形のなす積分路 Γ_R (図 3.1 参照) に沿って $e^{-z^2/2}$ を積分する (ただし, $\xi \neq 0$ とする).

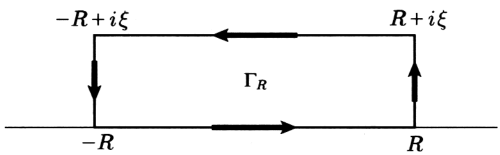


図 3.1　積 分 路 Γ_R

コーシーの積分定理より,

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2/2}\, dz = 0$$

である. したがって,

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\, dx + i\int_0^{\xi} e^{-(R+it)^2/2}\, dt$$

$$- \int_{-R}^{R} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx - i\int_0^{\xi} e^{-(R-it)^2/2}\, dt = 0.$$

ここで，

$$\left| \int_0^\xi e^{-(R \pm it)^2/2}\, dt \right| \leqq e^{-R^2/2} \int_0^\xi e^{t^2/2}\, dt \longrightarrow 0 \qquad (R \to \infty).$$

ゆえに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2}\, dx = e^{\xi^2/2} \mathcal{F}[f](\xi)$$

である．一方，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$ であるから，次を得る:

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}. \tag{3.11}$$

この (3.11) は明らかに $\xi = 0$ の場合も成り立っている．

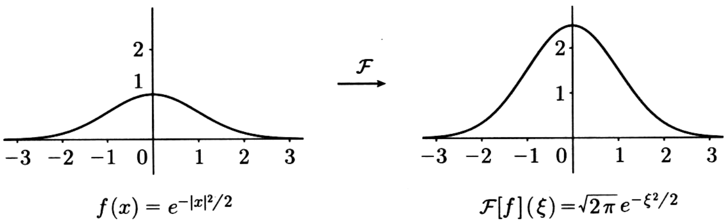


図 3.2 ガウス関数のフーリエ変換

次に，d 次元のガウス関数のフーリエ変換を計算しよう．(3.11) より，次がわかる:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-|x|^2/2}\right](\xi) &= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} e^{-|x|^2/2}\, dx \\
&= \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbf{R}} e^{-ix_j\xi_j - x_j^2/2}\, dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{d} \left(\sqrt{2\pi} e^{-\xi_j^2/2} \right) \\
&= (2\pi)^{d/2} e^{-|\xi|^2/2}.
\end{aligned}$$

一般のガウス関数 $g_a(x) = e^{-a|x|^2}$ $(a > 0)$ のフーリエ変換は次のようになる: $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ として，

$$g_a(x) = e^{-|\sqrt{2a}x|^2/2} = f \circ d_{\sqrt{2a}}$$

であるから，$a > 0$ のとき，

$$\mathcal{F}\left[e^{-a|x|^2}\right](\xi) = \frac{1}{\left(\sqrt{2a}\right)^d}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-(|\xi|^2/4a)} \tag{3.12}$$

となる.

3.4.3 フーリエ逆変換

本項では，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ 上の写像とみたとき，$\mathcal{F}^{-1}$ が $\mathcal{F}$ の逆写像になっていることを証明する.

定理 3.7 ($\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対するフーリエ反転公式) $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，次が成り立つ:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f.$$

次の補題の証明からはじめる.

補題 3.8 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ のとき，次が成り立つ:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi)g(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^d} f(x+y)\mathcal{F}[g](y)\,dy.$$

証明

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-iy\cdot\xi}f(y)\,dy\right)g(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(y-x)\cdot\xi}f(y)\,dy\right)g(\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-iy\cdot\xi}f(x+y)\,dy\right)g(\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} f(x+y)\left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-iy\cdot\xi}g(\xi)\,d\xi\right)dy = (\text{右辺}).
\end{aligned}$$

□

定理 3.7 の証明 $g(y) = e^{-|y|^2/2}$ とし，$t > 0$ に対して

$$g^t(y) = g(ty), \qquad g_t(\xi) = t^{-d}g\left(\frac{\xi}{t}\right)$$

とおく．前節のガウス関数のフーリエ変換の計算 (3.12) と定理 3.6 より，

$$\mathcal{F}[g](\xi) = (2\pi)^{d/2}g(\xi), \qquad \mathcal{F}[g^t](\xi) = (2\pi)^{d/2}g_t(\xi).$$

ただし，

$$(2\pi)^{d/2} = \int_{\mathbf{R}^d} g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^d} g_t(\xi)\,d\xi$$

であることに注意する．補題 3.8 より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi) g^t(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi &= (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^d} f(x+y) g_t(y)\, dy \\ &= (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^d} f(x+ty) g(y)\, dy \\ &\underset{t\to 0}{\to} (2\pi)^{d/2} f(x) \int_{\mathbf{R}^d} g(y)\, dy = (2\pi)^d f(x).\end{aligned}$$

また，$g^t(\xi) \to 1$ $(t \to 0)$ であるから，ルベーグの収束定理より，

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi) g^t(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi = (2\pi)^d f(x).$$

ゆえに，

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = f.$$

さらに，

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}[(\mathcal{F}[f])^\vee] = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = f. \qquad \square$$

3.4.4 フーリエ変換と微分

フーリエ変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$ は，実軸上の関数 $f(x)$ を $\{e^{ix\cdot\xi}\}_{\xi\in\mathbf{R}}$ で表したとき，f の中に $e^{ix\cdot\xi}$ がどのくらい含まれているかを表す量であった．フーリエ変換の大変興味深い性質のひとつは，f の導関数 $Df(x)$ を $\{e^{ix\cdot\xi}\}_{\xi\in\mathbf{R}}$ により展開したとき，Df の中に $e^{ix\cdot\xi}$ の含まれる量が，$\mathcal{F}[f](\xi)$ に ξ をかけた $\xi\mathcal{F}[f](\xi)$ になっているということである．このことを証明しよう．

命題 3.9 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ とする．このとき，

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = \xi\mathcal{F}[f](\xi)$$

である．また，$\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対して次が成り立つ:

$$\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi).$$

証明 部分積分をする:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[Df](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} \frac{1}{i} f'(x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{i} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot\xi} \xi f(x)\, dx = \xi\mathcal{F}[f](\xi).\end{aligned}$$

また，$D^\alpha f$ で $\alpha = 2$ の場合

$$\mathcal{F}[D^2 f](\xi) = \xi\mathcal{F}[Df](\xi) = \xi^2 \mathcal{F}[f](\xi)$$

である．この証明を繰り返せば一般の α に対して定理が証明できる． □

さて，この命題からわかることは，"α 回微分する" という操作が，フーリエ変換により，"多項式 ξ^α をかける" という単純な操作に置き換わっていることである．この性質を使って得られる典型的な応用例を一つ示しておこう．

命題 3.10 $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ が与えられたとき，

$$-f''(x) + f(x) = g(x) \tag{3.13}$$

を満たす $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ が存在する．

証明 両辺をフーリエ変換すると，命題 3.9 を使って，

$$(\xi^2 + 1)\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g] \tag{3.14}$$

となる．(3.14) はすぐに解くことができて，$\mathcal{F}[f] = (1+\xi^2)^{-1}\mathcal{F}[g]$ がその解である．これに $\mathcal{F}^{-1}$ を作用させると $f = \mathcal{F}^{-1}\left[(1+\xi^2)^{-1}\mathcal{F}[g]\right]$ となり，これは (3.13) を満たす． □

微分とフーリエ変換は多変数の場合も同様の関係があり，偏微分方程式を解くときに使われる．次のものは命題 3.9 の多変数版である．

定理 3.11 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して，$\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)$ が成り立つ．

証明 各変数ごとに命題 3.9 の証明を繰り返せばよい． □

3.4.5 合成積のフーリエ変換と熱方程式への応用

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，その**合成積**あるいは**たたみ込み積**とよばれる演算が次のように定義される：

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy \qquad \left(x \in \mathbf{R}^d\right).$$

右辺の積分は存在する．実際，たとえばシュヴァルツの不等式から

$$|f * g(x)| \leqq \int_{\mathbf{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,dy \leqq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$$

が得られる．また $x - y = y'$ なる変数変換により，

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y')g(y')\,dy' = g * f(x)$$

も成り立つ．

フーリエ変換のひとつの有用な性質は，関数の合成積を関数のかけ算に変えてしまうという点である．このことを証明しよう．

はじめに次のことに注意しておく．

命題 3.12 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ならば $f * g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である．実際，任意の非負整数 N に対して，d と N にのみ依存する定数 $c_{d,N}$ で，

$$|f * g|_N \leqq c_{d,N} \, |f|_{N+d+1} \, |g|_N$$

が成り立つ．

証明　まず，$f * g(x)$ が無限回連続偏微分可能であることを示す．そのためには，ルベーグ積分における積分記号下での微分に関する定理 1.24 から，任意の $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ と任意の $R > 0$ に対して，ある $\varphi \in L^1(\mathbf{R}^d)$ で，

$$|f(y)| \, |\partial_x^\alpha g(x-y)| \leqq \varphi(y) \qquad \left((x, y) \in \overline{B(0,R)} \times \mathbf{R}^d\right)$$

(ここで $\overline{B(0,R)} = \left\{x \in \mathbf{R}^d : |x| \leqq R\right\}$) を満たすものの存在を示せば十分である．

$$M = \sup_{z \in \overline{B(0,3R)}} |\partial^\alpha g(z)|$$

とおく．$M < \infty$ である．$x \in \overline{B(0,R)}$ かつ $|y| > 2R$ のとき，$|y| > 2R \geqq 2\,|x|$ であるから，$|x - y| \geqq |y| - |x| > |y|/2$ が成り立っている．したがって，このとき

$$|\partial_x^\alpha g(x-y)| \leqq C\,(1 + |x-y|)^{-d-1} \leqq C'\,(1 + |y|)^{-d-1}$$

が成り立っている．ここで C, C' は x, y に依存しない定数である．そこで

$$\varphi(y) = \begin{cases} M\,|f(y)| & (|y| \leqq 2R) \\ C'\,|f(y)|\,(1+|y|)^{-d-1} & (|y| > 2R) \end{cases}$$

とおくと，任意の $x \in \overline{B(0,R)}$ に対して，

$$|f(y)| \, |\partial_x^\alpha g(x-y)| \leqq \varphi(y)$$

であり，明らかに $\varphi \in L^1(\mathbf{R}^d)$ である．

以上のことと定理 1.24 より，$f * g \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ であり，任意の $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(y) \partial_x^\alpha g(x-y)\, dy = f * \partial^\alpha g(x)$$

が成り立つ．

次に命題の不等式を示す．

$$1 + |x| \leqq (1 + |x-y|)\,(1 + |y|) \tag{3.15}$$

であることに注意しておく．これより

$$
\begin{aligned}
(1+|x|)^k\left|\partial^\alpha(f*g)(x)\right| &\leqq (1+|x|)^k\int_{\mathbf{R}^d}|f(y)|\left|\partial_x^\alpha g(x-y)\right|dy\\
&\leqq \int_{\mathbf{R}^d}(1+|y|)^{-d-1}(1+|y|)^{k+d+1}|f(y)|\,(1+|x-y|)^k\left|\partial_x^\alpha g(x-y)\right|dy\\
&\leqq \left(\int_{\mathbf{R}^d}(1+|y|)^{-d-1}dy\right)|f|_{k+d+1}\,|g|_{k+|\alpha|}\,.
\end{aligned}
$$

よって求める不等式が得られる．□

合成積のフーリエ変換について次の公式が成り立つ．

定理 3.13 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき次が成り立つ:

$$
\mathcal{F}[f*g](\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)\qquad\left(\xi\in\mathbf{R}^d\right).
$$

証明 フビニの定理より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{\mathbf{R}^d}e^{-ix\cdot\xi}\left(\int_{\mathbf{R}^d}f(y)g(x-y)\,dy\right)dx\\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}e^{-i(x-y)\cdot\xi}g(x-y)\,dx\right)e^{-iy\cdot\xi}f(y)\,dy\\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}e^{-ix\cdot\xi}g(x)\,dx\right)e^{-iy\cdot\xi}f(y)\,dy\\
&= \left(\int_{\mathbf{R}^d}e^{-ix\cdot\xi}g(x)\,dx\right)\int_{\mathbf{R}^d}e^{-iy\cdot\xi}f(y)\,dy=(\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

□

合成積のフーリエ変換を $\mathbf{R}^d$ 上の熱方程式の初期値問題に応用してみよう．

$\Delta_x=\sum_{j=1}^{d}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とおく．考える問題は，与えられた $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，$\mathbf{R}^d\times[0,\infty)$ 上連続，かつ $\mathbf{R}^d\times(0,\infty)$ 上 C^2 級の関数 $u(x,t)$ で，熱方程式

$$
\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\Delta_x u(x,t)\qquad((x,t)\in\mathbf{R}^d\times(0,\infty))
$$

を満たし，かつ初期条件

$$
u(x,0)=f(x)\qquad(x\in\mathbf{R}^d)
$$

を満たすものを見いだすことである．まず，このような方程式の解を見いだすため，発見的 (形式的) 議論を行う．もし $u(x,t)$ が熱方程式を満たすとき，両辺を x についてフーリエ変換すると次のようになる:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[u(\cdot,t)\right](\xi)=\mathcal{F}\left[\Delta_x u(\cdot,t)\right](\xi)=-|\xi|^2\,\mathcal{F}\left[u(\cdot,t)\right](\xi).
$$

これは t に関する 1 階の常微分方程式であり，その一般解は

$$\mathcal{F}[u(\cdot,t)](\xi) = A(\xi)e^{-|\xi|^2 t}$$

で与えられる．初期条件より，$t=0$ の場合 $\mathcal{F}[f](\xi) = A(\xi)$ が得られる．したがって，フーリエ反転公式，フビニの定理が適用できるとして，

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u(\cdot,t)]](x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\,e^{-|\cdot|^2 t}\right](x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi)e^{-|\xi|^2 t}e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} f(y)e^{-iy\cdot\xi}\,dy\right)e^{-|\xi|^2 t}e^{ix\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} f(y)\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-|\xi|^2 t}e^{-i(y-x)\cdot\xi}\,d\xi\right)dy
\end{aligned}$$

である．ここで

$$h(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-|\xi|^2 t}e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi \ \left(= \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}\left[e^{-|\cdot|^2 t}\right](x)\right)$$

とおく．(3.12) より，

$$h(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{3.16}$$

である．これを $\mathbf{R}^d$ 上の**熱核**という．

フーリエ解析では，しばしば $\mathbf{R}^d$ 上の関数 $\varphi(x)$ と $t>0$ に対して

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) \qquad \left(x\in\mathbf{R}^d\right)$$

なる関数を定義して用いることがある．この記法を用いれば，$h(x) = h(x,1) = \dfrac{1}{(4\pi)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ に対して，

$$h_{\sqrt{t}}(x) = h(x,t)$$

である．熱核を用いると，$h(-x,t) = h(x,t)$ より，

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{\mathbf{R}^d} f(y)h(y-x,t)\,dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} f(y)h(x-y,t)\,dy = f * h_{\sqrt{t}}(x)
\end{aligned}$$

と表せる．そこで次の定理が成り立つことが期待される．

定理 3.14 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$u(x,t) = \begin{cases} f * h_{\sqrt{t}}(x) & (t > 0) \\ f(x) & (t = 0) \end{cases}$$

と定義すると，u は $\mathbf{R}^d \times [0,\infty)$ 上連続，かつ $\mathbf{R}^d \times (0,\infty)$ 上 C^2 級であり，$\mathbf{R}^d \times (0,\infty)$ 上で熱方程式を満たす．

証明 定理 3.12 より，$u(x,t)$ が $\mathbf{R}^d \times (0,\infty)$ 上 C^2 級 (じつは C^∞ 級) であることが示せる．いま，

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,t)\right](\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[u(\cdot,t)\right](\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[f * h_{\sqrt{t}}\right](\xi)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\left[f\right](\xi)\mathcal{F}\left[h_{\sqrt{t}}\right](\xi)$$

である．ここで

$$\mathcal{F}\left[h_{\sqrt{t}}\right](\xi) = (2\pi)^d\mathcal{F}^{-1}[h_{\sqrt{t}}](-\xi) = e^{-|\xi|^2 t}$$

より，

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,t)\right](\xi) = -|\xi|^2\,\mathcal{F}\left[f\right](\xi)e^{-|\xi|^2 t}$$
$$= \mathcal{F}\left[\Delta_x f\right](\xi)e^{-|\xi|^2 t}$$
$$= \mathcal{F}\left[\Delta_x f\right](\xi)\mathcal{F}\left[h_{\sqrt{t}}\right](\xi)$$
$$= \mathcal{F}\left[\Delta_x f * h_{\sqrt{t}}\right](\xi)$$

となる．これをフーリエ逆変換すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta_x f * h_{\sqrt{t}}(x) = \Delta_x\left(f * h_{\sqrt{t}}\right)(x) = \Delta_x u(x,t)$$

が導かれる．

最後に，$\mathbf{R}^d \times [0,\infty)$ における連続性を示す．これを示すには，$(x,0) \in \mathbf{R}^d \times [0,\infty)$ での u の連続性を示せば十分である．f は $\mathbf{R}^d$ 上で一様連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta_0 > 0$ が存在し，$|x-y| < \delta_0$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つ．したがって，$0 < \delta < \delta_0$ なる δ に対して，$x, y \in \mathbf{R}^d$，$t > 0$ が $|x-y| + t < \delta$ を満たすとき

$$|u(y,t) - f(x)| \leqq |u(y,t) - f(y)| + |f(y) - f(x)|$$
$$< |u(y,t) - f(y)| + \varepsilon$$

である．また，

$$\int_{\mathbf{R}^d} h\,(z,t)\,dz = \mathcal{F}\left[h_{\sqrt{t}}\right](0) = 1$$

より

$$\begin{aligned}|u(y,t)-f(y)| &= \left|\int_{\mathbf{R}^d} f(y-z)h(z,t)\,dz - \int_{\mathbf{R}^d} f(y)h(z,t)\,dz\right|\\ &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} |f(y-z)-f(y)|\,h(z,t)\,dz\\ &= \int_{|z|<\delta_0} |f(y-z)-f(y)|\,h(z,t)\,dz + \int_{|z|\geqq\delta_0} |f(y-z)-f(y)|\,h(z,t)\,dz\\ &\leqq \varepsilon + \int_{|z|\geqq\delta_0} |f(y-z)-f(y)|\,h(z,t)\,dz.\end{aligned}$$

ここで $M = \sup_{x\in\mathbf{R}^d} |f(x)|$ とおくと，$M<\infty$ であり，$w = z/\sqrt{4\pi t}$ なる変数変換をすると

$$\begin{aligned}\int_{|z|\geqq\delta_0} |f(y-z)-f(y)|\,h(z,t)\,dz &\leqq 2M\int_{|z|\geqq\delta_0} h(z,t)\,dz\\ &= 2M\int_{|z|\geqq\delta_0} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\,dz\\ &= 2M\int_{|w|\geqq\delta_0/\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi|w|^2}dw \to 0 \quad (t\to 0).\end{aligned}$$

したがって，必要ならば $\delta>0$ を十分小さくとって，$0<t<\delta$ ならば

$$2M\int_{|w|\geqq\delta_0/\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi|w|^2}dw < \varepsilon$$

とできる．以上より，$|x-y|+t<\delta$ のとき，

$$|u(y,t)-f(x)| < 3\varepsilon$$

となる．これより $\mathbf{R}^d\times[0,\infty)$ における連続性が示された． □

注意 熱方程式の解で，この定理の条件を満たすようなものの一意性は成り立たないことが知られている．たとえば $f=0$ の場合に，恒等的に 0 という自明な解以外にも $\mathbf{R}^d\times[0,\infty)$ 上連続，かつ $\mathbf{R}^d\times(0,\infty)$ 上 C^2 級であり，$\mathbf{R}^d\times(0,\infty)$ 上で熱方程式を満たし，$u(x,0)=0$ なる $u(x,t)$ が存在することが知られている．しかしさらに制約条件を課して，u が $\mathbf{R}^d\times[0,\infty)$ 上連続，かつ $\mathbf{R}^d\times(0,\infty)$ 上 C^2 級であり，$\mathbf{R}^d\times(0,\infty)$ 上で熱方程式を満たし，$u(x,0)=f(x)$ かつ任意の正数 c に対し，ある正定数 C が存在し，

$$|u(x,t)| \leqq Ce^{c|x|^2}, \qquad |\nabla_x u(x,t)| \leqq Ce^{c|x|^2}$$

を満たすような解は一意的であることが知られている．$f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，$u(x,t) = f*h(\cdot,t)(x)$ がこの制約条件を満たすことは容易に確認できる．熱方

程式の解の一意性に関しては，本書では立ち入らない[2)]．

合成積は解析学において非常に有用な役割を果たしている．本節の最後に，合成積の定義をより一般的な関数に拡張し，その応用例を与えておく．

定理 3.15 $1 \leqq p \leqq \infty$ とし，$f \in L^p(\mathbf{R}^d)$，$g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき f と g の**合成積**，あるいは**たたみ込み積**

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy, \qquad g * f(x) = \int_{\mathbf{R}^d} g(y)f(x-y)\,dy$$

が a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ で定義でき，$f * g(x) = g * f(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ かつ

$$\|f * g\|_p \leqq \|f\|_p \|g\|_1$$

を満たす．(この不等式はヤングの不等式とよばれるものの一部である．)

証明 $p=1$ の場合は，フビニの定理より

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &\leqq \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dydx \\ &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbf{R}^d} |g(x-y)|\,dx\right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$f * g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ であり，a.e. x に対して，$f * g(x)$ が定義されている．$1 < p < \infty$ の場合は，q を $1/p + 1/q = 1$ なる正数とすれば，ヘルダーの不等式より

$$\begin{aligned}|f * g(x)| &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |f(y)|\,|g(x-y)|^{1/p}\,|g(x-y)|^{1/q}\,dy \\ &\leqq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(y)|^p\,|g(x-y)|\,dy\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |g(x-y)|\,dy\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(y)|^p\,|g(x-y)|\,dy\right)^{1/p} \|g\|_1^{1/q}.\end{aligned}$$

ここで $|f|^p \in L^1(\mathbf{R}^d)$ であるから，すでに示した場合より，最後の項は a.e. x に対して有限である．また，フビニの定理より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} |f * g(x)|^p\,dx &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |g(x-y)|\,dx\right) |f(y)|^p\,dy\ \|g\|_1^{p/q} \\ &= \|f\|_p^p\,\|g\|_1\,\|g\|_1^{p/q}.\end{aligned}$$

2) 詳細は，たとえば Folland [F2]，ジョン [J] を参照．

ゆえに

$$\|f*g\|_p \leqq \|f\|_p \|g\|_1^{1/p} \|g\|_1^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_1$$

が成り立つ．$p=\infty$ の場合は，明らかである．

以上と同様の議論により $g*f(x)$ が a.e. x に対して定義でき，

$$\|g*f\|_p \leqq \|g\|_1 \|f\|_p$$

となることが証明できる．

最後に，$f*g(x) = g*f(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ を示す．$p=\infty$ の場合は $f(y)g(x-y)$ が y に関してルベーグ積分可能であるから，ルベーグ積分に関する変数変換[3)]により等式が示せる．$1 \leqq p < \infty$ の場合は，定理 1.28 より

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$$

なる $f_n, g_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ をとれば $(C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である$)$ $\sup_n \|f\|_p < \infty$ であり，

$$\begin{aligned}\|f*g - f_n*g_n\|_p &\leqq \|f*g - f_n*g\|_p + \|f_n*g - f_n*g_n\|_p \\ &\leqq \|f-f_n\|_p \|g\|_1 + \|f_n\|_p \|g-g_n\|_1 \\ &\to 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして

$$\|g*f - g_n*f_n\|_p \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

も成り立つことがわかる．さらにすでに示したように $f_n*g_n = g_n*f_n$ であるから，$f*g(x) = g*f(x)$ a.e. x が得られる． □

系 3.16 $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき，任意の $\xi \in \mathbf{R}^d$ に対して

$$\mathcal{F}[f*g](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)$$

が成り立つ．

証明 証明は，フビニの定理を用いて定理 3.13 と同様にして行うことができる． □

命題 3.12 の $f*g$ の無限回連続偏微分可能性の証明は，$g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であれば，$f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ でも成り立つ．実際，$p=1,\infty$ の場合は命題 3.12 の証明の中で定義した φ は $\mathbf{R}^d$ 上可積分であるから，命題 3.12 の証明が適用できる．$1<p<\infty$ の場合は，$1/p+1/q=1$ なる q に対して

$$|\partial_x^\alpha g(x-y)| \leqq C''(1+|y|)^{-(d+1)/q}$$

[3)] [新井] 定理 11.12 参照.

であることに注意して，

$$\varphi(x)=\begin{cases} M\,|f(y)| & (|y|\leqq 2R) \\ C''\,|f(y)|\,(1+|y|)^{-(d+1)/q} & (|y|>2R) \end{cases}$$

とおけば，

$$\int_{|y|\leqq 2R}|f(y)|\,dy \leqq \left(\int_{|y|\leqq 2R}|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_{|y|\leqq 2R}dy\right)^{1/q}<\infty,$$

$$\int_{|y|>2R}|f(y)|\,(1+|y|)^{-(d+1)/q}\,dy$$

$$\leqq \left(\int_{|y|>2R}|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_{|y|>2R}\left(1+|y|\right)^{-(d+1)}dy\right)^{1/q}<\infty$$

により $\varphi\in L^1(\mathbf{R}^d)$ である．これに対して命題 3.12 の証明を適用すればよい．

したがって次の系が得られる．

系 3.17 $f\in L^p(\mathbf{R}^d)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ とし，$g\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき $f*g\in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ である．

このことは，$L^p(\mathbf{R}^d)$ に属する関数が $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の関数との合成積により滑らかになることを意味している．特に，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の関数として適切なものを選べば，次のことがいえる．

定理 3.18 $\chi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とし，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d}\chi(x)\,dx=1$ を満たすとする．

$$\chi_t(x)=\frac{1}{t^d}\chi\left(\frac{x}{t}\right)\qquad (t>0, x\in\mathbf{R}^d)$$

とする．このとき，$1\leqq p<\infty$, $f\in L^p(\mathbf{R}^d)$ に対して，$f*\chi_t\in C^\infty(\mathbf{R}^d)\cap L^p(\mathbf{R}^d)$ であり，

$$\lim_{t\to 0}\|f*\chi_t-f\|_p=0$$

が成り立つ．

証明 はじめに $f\in L^p(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$G_t^p(z)=\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-tz)-f(x)|^p\,dx\qquad (t>0,\ z\in\mathbf{R}^d)$$

とおくと，系 1.30 より $\displaystyle\lim_{t\to 0}G_t^p(z)=0\ (z\in\mathbf{R}^d)$ であることに注意する．また，$G_t^p(z)^{1/p}\leqq$

$2\|f\|_p$ である.

まず, $p=1$ の場合を示す. フビニの定理を用いたあと, $z=y/t$ なる変数変換をすると次の式が得られる:

$$\begin{aligned}\|f*\chi_t-f\|_1 &= \int_{\mathbf{R}^d}\left|\int_{\mathbf{R}^d}(f(x-y)-f(x))\,\chi_t(y)\,dy\right|dx\\ &\leqq \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\,|\chi_t(y)|\,dy\right)dx\\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\,dx\right)|\chi_t(y)|\,dy\\ &= \int_{\mathbf{R}^d}G_t^1(z)\,|\chi(z)|\,dz.\end{aligned}$$

ここで $G_t^1(z)\,|\chi(z)|$ は $G_t^1(z)\,|\chi(z)|\leqq 2\,\|f\|_1\,|\chi(z)|$ よりルベーグ積分可能であるから, ルベーグの収束定理より

$$\lim_{t\to 0}\|f*\chi_t-f\|_1=0$$

が得られる.

次に, $1<p<\infty$ の場合を示す. q を $1/p+1/q=1$ を満たす正数とする. ヘルダーの不等式より次を得る:

$$\begin{aligned}&\|f*\chi_t-f\|_p\\ &=\left(\int_{\mathbf{R}^d}\left|\int_{\mathbf{R}^d}(f(x-y)-f(x))\,\chi_t(y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p}\\ &\leqq\left(\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\,|\chi_t(y)|\,dy\right)^p dx\right)^{1/p}\\ &=\left(\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|\,|\chi_t(y)|^{1/p}\,|\chi_t(y)|^{1/q}\,dy\right)^p dx\right)^{1/p}\\ &\leqq\left(\int_{\mathbf{R}^d}\left(\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p\,|\chi_t(y)|\,dy\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|\chi_t(y)|\,dy\right)^{1/q}\right)^p dx\right)^{1/p}\\ &=\left(\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p\,|\chi_t(y)|\,dy\right)\left(\int_{\mathbf{R}^d}|\chi_t(y)|\,dy\right)^{p/q}dx\right)^{1/p}\\ &=\left(\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p\,|\chi_t(y)|\,dydx\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|\chi_t(y)|\,dy\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

$y/t=z$ とおくと, $dy=t^d dz$ より

$$\int_{\mathbf{R}^d}|\chi_t(y)|\,dy=\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1}{t^d}\left|\chi\left(\frac{y}{t}\right)\right|dy=\int_{\mathbf{R}^d}|\chi(z)|\,dz$$

である．一方，フビニの定理より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)-f(x)|^p\,|\chi_t(y)|\,dydx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)|\chi_t(y)|\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} G_t^p(z)\,|\chi(z)|\,dz\end{aligned}$$

であるが，$G_t^p(z)\,|\chi(z)|$ は $G_t^p(z)\,|\chi(z)| \leqq 2^p\,\|f\|_p^p\,|\chi(z)|$ よりルベーグ積分可能であるから，ルベーグの収束定理より

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-tz)-f(x)|^p\,dx\right)|\chi(z)|\,dz = 0$$

が成り立つ．よって定理が証明された． □

この定理より，たとえば，熱核 $h(x,t)=h_{\sqrt{t}}(x)$ に対して，次のことが成り立つ．

定理 3.19 $1 \leqq p < \infty$ とし，$f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき $f * h_{\sqrt{t}} \in C^\infty(\mathbf{R}^d)\cap L^p(\mathbf{R}^d)$ であり，

$$\lim_{t\to 0}\left\|f * h_{\sqrt{t}} - f\right\|_p = 0$$

となる．

最後に，定理 3.18 がルベーグ積分論で知られる次の不等式[4)]からも証明できることを示しておく．

補題 3.20 (ミンコフスキーの積分不等式) $1 \leqq p < \infty$ とする．$f(x,y)$ を $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ 上の複素数値ルベーグ可測関数で，

$$f(\cdot,y) \in L^p(\mathbf{R}^d) \text{ a.e. } y \in \mathbf{R}^d,$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x,\cdot)|^p\,dx\right)^{1/p} \in L^1(\mathbf{R}^d)$$

であるとする．このとき

$$\left(\int_{\mathbf{R}^d}\left|\int_{\mathbf{R}^d} f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} \leqq \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p} dy$$

が成り立つ．

---

4) [新井] 定理 11.11 を参照．

定理 3.18 の別証明 ミンコフスキーの積分不等式から

$$\begin{aligned}
\|f*\chi_t - f\|_p &= \left(\int_{\mathbf{R}^d}\left|\int_{\mathbf{R}^d}(f(x-y)-f(x))\,\chi_t(y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leqq \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p\,|\chi_t(y)|^p\,dx\right)^{1/p} dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\frac{1}{t^d}\left|\chi\left(\frac{y}{t}\right)\right| dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-tz)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}|\chi(z)|\,dz.
\end{aligned}$$

ここで $G_t(z) = \left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-tz)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ とおくと，系 1.30 より $\lim_{t\to 0} G_t(z) = 0$ a.e. $z \in \mathbf{R}^d$ であり，$G_t(z) \leqq 2\|f\|_p$ である．したがって，ルベーグの収束定理より

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}|f(x-tz)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}|\chi(z)|\,dz = 0$$

が得られる． □

3.5 L^1 関数，L^2 関数に対するフーリエ変換

本節では，L^1 関数，ならびに L^2 関数のフーリエ変換に関する基本的な性質について述べる．はじめに L^1 関数のフーリエ変換からはじめる．

3.5.1 L^1 関数のフーリエ変換

L^1 関数のフーリエ変換について次のことが成り立つ．

定理 3.21 (リーマン・ルベーグの定理) $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ のとき，$\mathcal{F}[f]$ は $\mathbf{R}^d$ 上で連続であり，

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^d}|\mathcal{F}[f](\xi)| \leqq \|f\|_1, \tag{3.17}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|\mathcal{F}[f](\xi)| = 0 \tag{3.18}$$

が成り立つ．

証明 (3.17) は

$$|\mathcal{F}[f](\xi)| = \left|\int_{\mathbf{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx\right| \leqq \int_{\mathbf{R}^d}|f(x)|\,dx$$

による．$\xi \in \mathbf{R}^d$ と ξ に収束する任意の点列 $\xi_n \in \mathbf{R}^d$ $(n = 1, 2, \cdots)$ をとる．このとき

$$\lim_{n\to\infty} f(x)e^{-ix\cdot\xi_n} = f(x)e^{-ix\cdot\xi} \text{ a.e. } x \in \mathbf{R}^d$$

であり，かつ $\left|f(x)e^{-ix\cdot\xi_n}\right| = |f(x)|$ であるから，ルベーグの収束定理により

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}[f](\xi_n) = \mathcal{F}[f](\xi)$$

が得られ，$\mathcal{F}[f]$ の連続性が導かれる．$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の場合は，すでに示したように $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であるから，(3.18) が成り立つ．$f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ の場合を考える．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で $\|f-g\|_1 < \varepsilon$ を満たすものが存在する (定理 1.28)．したがって，

$$|\mathcal{F}[f](\xi)| \leqq |\mathcal{F}[f](\xi) - \mathcal{F}[g](\xi)| + |\mathcal{F}[g](\xi)|$$
$$\leqq \|f-g\|_1 + |\mathcal{F}[g](\xi)|.$$

ゆえに

$$\limsup_{|\xi|\to\infty} |\mathcal{F}[f](\xi)| \leqq \varepsilon$$

が成り立つ．これより後半の主張が証明される．□

3.5.2　L^2 関数のフーリエ変換

L^2 関数は必ずしもルベーグ積分可能ではない．たとえば $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ x^{-1} & (x \geqq 1) \end{cases}$$

と定義する．この関数は $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可測関数で

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 \, dx = \int_1^\infty x^{-2} \, dx = 1$$

であるが，

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)| \, dx = \int_1^\infty x^{-1} \, dx = \infty$$

である．このような関数に対しては，フーリエ変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$ を直接積分により定義することができない．まず，$\mathbf{R}^d$ 上の L^2 関数に対してもフーリエ変換の定義を拡張できることを示す．基本的な考え方を述べれば，L^2 関数に対するフーリエ変換の定義は，L^2 関数を $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に属する関数で近似し，その近似列のフーリエ変換の極限により L^2 関数のフーリエ変換を定義するというものである．このことを正確かつ厳密に述べるため，いくつかの準備からはじめる．

補題 3.22 ($\mathcal{S}$ に対するプランシュレルの定理) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}\,d\xi,$$

特に

$$\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\,\|\mathcal{F}[f]\|_2$$

となる．

証明 最初の等式を示す．

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi)\left(\int_{\mathbf{R}^d}\overline{g(x)}e^{ix\cdot\xi}\,dx\right)d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\mathcal{F}[f](\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi\right)\overline{g(x)}\,dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx
\end{aligned}$$

となっている．後半の主張は $f = g$ として適用すればよい． □

さて，任意の $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ を考える．定理 1.28 より，ある $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ で，$\|f - f_n\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものが存在する．このとき補題 3.22 より

$$\|\mathcal{F}[f_n] - \mathcal{F}[f_m]\|_2 = (2\pi)^{d/2}\,\|f_n - f_m\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．したがって，$L^2(\mathbf{R}^d)$ の完備性 (定理 1.25) より，ある $F \in L^2(\mathbf{R}^d)$ で $\|F - \mathcal{F}[f_n]\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものが存在する．この極限関数 F を f のフーリエ変換と定義するのであるが，そのまえに F が f の近似列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとり方によらないことを示しておこう．$g_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ を $\|f - g_n\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものとする．このとき上記の議論と同様にして，ある $G \in L^2(\mathbf{R}^d)$ で $\|G - \mathcal{F}[g_n]\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものが存在することがわかる．このとき

$$\begin{aligned}
\|F - G\|_2 &\leqq \|F - \mathcal{F}[f_n]\|_2 + \|\mathcal{F}[f_n] - \mathcal{F}[g_n]\|_2 + \|\mathcal{F}[g_n] - G\|_2 \\
&= \|F - \mathcal{F}[f_n]\|_2 + (2\pi)^{d/2}\,\|f_n - g_n\|_2 + \|\mathcal{F}[g_n] - G\|_2 \\
&\leqq \|F - \mathcal{F}[f_n]\|_2 + (2\pi)^{d/2}\,\|f_n - f\|_2 \\
&\qquad + (2\pi)^{d/2}\,\|f - g_n\|_2 + \|\mathcal{F}[g_n] - G\|_2 \\
&\to 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

ゆえに $F = G$ a.e. が成り立つ．

そこで，L^2 関数 f に対するフーリエ変換を

$$\mathcal{F}_{L^2}[f] = F$$

により定める．L^1 関数に対するフーリエ変換が各点に対して定義されているのに対して，L^2 関数のフーリエ変換は，測度 0 の違いを許して定義される．$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ に対するフーリエ逆変換 $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}[f]$ も同様に，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ による近似列をとって定義される．

命題 3.23 $f \in L^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mathbf{R}^d)$ のとき，

$$\mathcal{F}_{L^2}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) \text{ a.e. } \xi \in \mathbf{R}^d,$$
$$\mathcal{F}_{L^2}^{-1}[f](\xi) = \mathcal{F}^{-1}[f](\xi) \text{ a.e. } \xi \in \mathbf{R}^d$$

である．

証明 フーリエ変換に関する主張を示す．フーリエ逆変換に対する証明も同様である．定理 1.28 より，ある $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ で，$\|f - f_n\|_2 \to 0, \|f - f_n\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものが存在する．このとき，L^2 関数に対するフーリエ変換の定義から $\|\mathcal{F}_{L^2}[f] - \mathcal{F}[f_n]\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．したがって，系 1.26 から，ある部分列 $\{f_{n_j}\} \subset \{f_n\}$ を選んで

$$\lim_{j \to \infty} \mathcal{F}[f_{n_j}](\xi) = \mathcal{F}_{L^2}[f](\xi) \text{ a.e. } \xi \in \mathbf{R}^d$$

とできる．さらに

$$\left|\mathcal{F}[f_{n_j}](\xi) - \mathcal{F}[f](\xi)\right| \leqq \left\|f_{n_j} - f\right\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．よって命題が証明された．□

この命題より，今後 $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}_{L^2}[f]$，フーリエ逆変換 $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}[f]$ を特に混乱のない場合はそれぞれ単に $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[f]$ と表すことにする．

L^2 関数に対するフーリエ変換の特徴的なことは，プランシュレルの定理とフーリエ反転公式が L^2 の設定で成立することである．

定理 3.24 (プランシュレルの定理) f，$g \in L^2(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}\,d\xi,$$

特に

$$\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\mathcal{F}[f]\|_2$$

となる．

証明　ある $f_n, g_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ で，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$，$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_2 = 0$ なるものが存在する．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[f_n] - \mathcal{F}[f]\|_2 = 0$$

より $\sup_n \|\mathcal{F}[f_n]\|_2 < \infty$ である．したがってシュヴァルツの不等式より

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}\, d\xi - \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f_n](\xi)\overline{\mathcal{F}[g_n](\xi)}\, d\xi \right| \\
&\leqq \left| \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}\, d\xi - \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f_n](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}\, d\xi \right| \\
&\quad + \left| \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f_n](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}\, d\xi - \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f_n](\xi)\overline{\mathcal{F}[g_n](\xi)}\, d\xi \right| \\
&\leqq \|\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[f_n]\|_2 \|\mathcal{F}[f]\|_2 + \|\mathcal{F}[f_n]\|_2 \|\mathcal{F}[g] - \mathcal{F}[g_n]\|_2 \\
&\to 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

である．また同様にして

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} f_n(x)\overline{g_n(x)}\, dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

が成り立つ．補題 3.22 より

$$\int_{\mathbf{R}^d} f_n(x)\overline{g_n(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f_n](\xi)\overline{\mathcal{F}[g_n](\xi)}\, d\xi.$$

ここで $n \to \infty$ として定理の前半の主張が証明される．

後半の主張は，前半において $f = g$ を適用すればよい．　□

定理 3.25 (フーリエ反転公式)　$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ のとき，次が成り立つ:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[f]\right](x) = f(x) \text{ a.e. } x \in \mathbf{R}^d.$$

証明　$f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[f_n] - \mathcal{F}[f]\|_2 = 0$ であり，$\mathcal{F}[f_n] \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f_n]] - \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]\right\|_2 = 0$$

が成り立つ．定理 3.7 より $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f_n]] = f_n$ であるから，

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] - f\right\|_2 &\leqq \left\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] - \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f_n]]\right\|_2 + \left\|\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f_n]] - f_n\right\|_2 \\
&\quad + \|f_n - f\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となり，$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ が得られる．残りの主張も同様にして証明できる．　□

注意 この定理の $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ は正確にはともに $\mathcal{F}_{L^2}$, $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}$ を意味するものであることに注意してほしい．特に $\mathcal{F}_{L^2}[f] \in L^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mathbf{R}^d)$ を仮定すれば，命題 3.23 より

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \mathcal{F}_{L^2}[f](\xi)\, d\xi \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^d$$

が成り立っている．

定理 3.26 $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi) \text{ a.e. } \xi \in \mathbf{R}^d$$

が成り立つ．

証明 ある $f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ で，$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$ を満たすものが存在する．$f_n \in L^1(\mathbf{R}^d)$ より

$$\mathcal{F}[f_n * g](\xi) = \mathcal{F}[f_n](\xi)\mathcal{F}[g](\xi) \qquad (\xi \in \mathbf{R}^d)$$

が成り立っている．ゆえに，プランシュレルの定理と定理 3.15 より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}[f_n * g] - \mathcal{F}[f * g]\|_2 &= (2\pi)^{d/2} \lim_{n\to\infty} \|f_n * g - f * g\|_2 \\ &\leqq (2\pi)^{d/2} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 \|g\|_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

である．したがって，系 1.26 より，ある部分列 $\{n(j)\} \subset \{n\}$ が存在し，a.e. $\xi \in \mathbf{R}^d$ に対して

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}\left[f_{n(j)} * g\right](\xi) = \mathcal{F}[f * g](\xi)$$

が成り立つ．プランシュレルの定理から

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{F}\left[f_{n(j)}\right] - \mathcal{F}[f]\right\|_2 = \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{d/2} \left\|f_{n(j)} - f\right\|_2 = 0$$

となっている．したがって，必要ならばさらに部分列 $\{m(j)\} \subset \{n(j)\}$ をとることにより

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}\left[f_{m(j)}\right](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$$

である．以上のことから，a.e. $\xi \in \mathbf{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}\left[f_{m(j)} * g\right](\xi) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}\left[f_{m(j)}\right](\xi)\mathcal{F}[g](\xi) \\ &= \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)\end{aligned}$$

が得られる． □

3.6 留数定理を用いたフーリエ変換の計算

本節では，フーリエ変換を具体的に計算する方法のひとつとして，関数論の留数定理を用いる計算法を解説する．まず留数に関する復習からはじめる．

3.6.1 留数の復習

$a \in \mathbf{C}, r > 0$ とし，

$$D^*(a,r) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z-a| < r\}$$

とおく．関数 $f(z)$ が，ある $r > 0$ に対して，$D^*(a,r)$ で正則であるとする．このとき，$f(z)$ は次のように a を中心としてローラン展開できることが知られている:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D^*(a,r)),$$

ただしここで

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=s} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad (0 < s < r)$$

であり，線積分は a を中心に反時計回りの向きにする．$c_{-1} = \mathrm{Res}(f;a)$ と表し，f の a における**留数**という．$k = \inf\{n \in \mathbf{Z} : c_n \neq 0\}$ とおく．ただし $\infty = \inf \emptyset$ と定める．$k \geqq 0$ ならば，$f(z)$ は $|z-a| < r$ 上の正則関数とみなすことができる．$-\infty < k \leqq -1$ の場合，a を $f(z)$ の (k 位) の**極**という．$k = -\infty$ の場合，a を $f(z)$ の**真性特異点**という．極と真性特異点を総称して**孤立特異点**という．

$\Omega \subset \mathbf{C}$ を領域 (連結な開集合) とする．$A \subset \Omega$ を有限あるいは可算無限集合とし，A の点はすべて孤立点であるとする．すなわち，任意の $a \in A$ に対して，十分小さな $r > 0$ をとれば，円板 $\{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$ に a 以外の A の点を含まないようにできるとする．$f(z)$ が $\Omega \setminus A$ 上で正則であり，かつ A の各点が $f(z)$ の極であるとき，$f(z)$ を A の点を極にもつ Ω 上の**有理型関数**という．

留数の計算方法を示しておこう．

命題 3.27 $a \in \Omega$ とし，$f(z)$ が Ω 上の有理型関数とする．$a \in \Omega$ が $f(z)$ の 1 位の極であるとき，

$$\mathrm{Res}(f;a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

であり，一般に a が k 位の極の場合は

$$\mathrm{Res}(f;a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-a)^k f(z)\right]$$

である．

証明

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k}$$

であるから，

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-a)^k f(z) = (k-1)!c_{-1} + k!c_0(z-a) + \cdots,$$

ゆえに

$$\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-a)^k f(z) = c_{-1} + \frac{k!}{(k-1)!}c_0(z-a) + \cdots \to c_{-1} \quad (z\to a). \quad \square$$

次のことが成り立つ．証明は関数論の本を参照してほしい．

定理 3.28 (留数定理) $f(z)$ を Ω 上の有理型関数とする．D を Ω の部分領域で，区分的に滑らかな有限個のジョルダン閉曲線 C で囲まれているものとする．また D の閉包 D^a が $D^a \subset \Omega$ を満たしているとする．$f(z)$ は C 上に極をもたず，D 内の極は $a_1, \cdots, a_n$ であるとする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f;a_j),$$

ただし，C は正に向き付けられているものとする[5)]．

3.6.2 フーリエ変換の計算

$P(z), Q(z)$ を z の多項式

$$P(z) = \alpha_M z^M + \alpha_{M-1} z^{M-1} + \cdots + \alpha_0,$$

$$Q(z) = \beta_N z^N + \beta_{N-1} z^{N-1} + \cdots + \beta_0$$

であるとする (ただし $\alpha_M \neq 0$, $\beta_N \neq 0$ とする).

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

5) C 上の点が正の向きに沿って移動するとは，点が D 内の点を左に見て動くように定められていることである．

とする.

定理 3.29 $N > M$ であり, $f(z)$ の極は実軸上にはなく, 上半平面[6]に含まれる極を $a_1, \cdots, a_m$, 下半平面に含まれる極を $b_1, \cdots, b_n$ とする. このとき

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \begin{cases} -2\pi i \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z)e^{-i\xi z}; b_j) & (\xi > 0), \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f(z)e^{-i\xi z}; a_j) & (\xi < 0) \end{cases}$$

である. 特に $N > M + 1$ の場合は, $f \in L^1(\mathbf{R})$ であり, 任意の $\xi \in \mathbf{R}$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}\,dx.$$

注意 以下の証明からわかることであるが, 下半平面あるいは上半平面に極がないときは, それぞれ $\xi > 0$, $\xi < 0$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = 0.$$

証明 $N > M$ のとき, ある正定数 C_1, C_1 が存在し,

$$|f(z)| \leqq C_1\,|z|^{-1} \qquad (|z| \geqq C_2)$$

が成り立つ. $g_\xi(z) = f(z)e^{-i\xi z}$ とおく. $\xi < 0$ とする. 十分大きな $R > 0$ に対して, 図 3.3 のような半円 Γ_R で囲まれる領域の中に $a_1, \cdots, a_m$ がすべて含まれるようにできる. 留数定理より

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(g_\xi; a_j) &= \int_{\Gamma_R} g_\xi(z)\,dz \\ &= \int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}\,dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{-i\xi Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}\,d\theta \end{aligned}$$

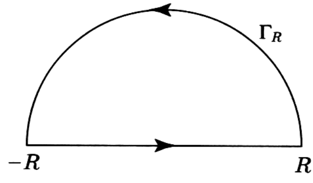


図 3.3

[6] $\Pi^+ = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ を上半平面, $\Pi^- = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z < 0\}$ を下半平面という.

である．ここで $\xi<0$ より，$0<\theta<\pi$ のとき

$$\begin{aligned}\left|f(Re^{i\theta})e^{-i\xi Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}\right| &= \left|f(Re^{i\theta})e^{-i\xi R(\cos\theta+i\sin\theta)}iRe^{i\theta}\right| \\ &\leqq R\left|f(Re^{i\theta})\right|e^{\xi R\sin\theta} \\ &\leqq C_1e^{\xi R\sin\theta}\to 0 \qquad (R\to\infty)\end{aligned}$$

である．また $R\geqq C_2$ ならば

$$R\left|f(Re^{i\theta})\right|e^{\xi R\sin\theta}\leqq C_1$$

であるから，ルベーグの収束定理より

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{-i\xi Re^{i\theta}}Rie^{i\theta}\,d\theta\right|=0$$

となる．ゆえに

$$2\pi i\sum_{j=1}^m \mathrm{Res}(g_\xi;a_j)=\lim_{R\in\infty}\int_{-R}^R f(x)e^{-i\xi x}\,dx$$

が得られる．$\xi>0$ の場合は，上記の議論を下半円にして適用すれば，同様にして証明できる．

$N>M+1$ の場合は，

$$|f(x)|\leqq C_4\frac{1}{1+|x|^2} \qquad (x\in\mathbf{R})$$

であるから $f\in L^1(\mathbf{R})$ となり，主張がルベーグの収束定理から示される． □

例題 1 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換を求めよ．(Hint: 有理型関数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ に上記の定理 3.29 を適用せよ．)

答 $g_\xi(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)}e^{-i\xi z}$ であるから，

$$\mathrm{Res}(g_\xi;i)=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}e^{-i\xi z}=\frac{e^\xi}{2i},$$

$$\mathrm{Res}(g_\xi;-i)=\lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i}e^{-i\xi z}=-\frac{e^{-\xi}}{2i}.$$

ゆえに $\xi<0$ の場合，

$$\mathcal{F}[f](\xi)=2\pi i\frac{e^\xi}{2i}=\pi e^{-|\xi|}$$

であり，$\xi>0$ の場合は

$$\mathcal{F}[f](\xi)=-2\pi i\left(-\frac{e^{-\xi}}{2i}\right)=\pi e^{-|\xi|},$$

$\xi = 0$ の場合は $\mathcal{F}[f](\xi)$ の連続性より $\mathcal{F}[f](0) = \pi$ が得られる．以上より $\mathcal{F}[f](\xi) = \pi e^{-|\xi|}$ である． □

例題 2 $a \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Im}\, a > 0$ とする．$\xi \neq 0$ に対して

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x+a} e^{-ix\xi}\, dx$$

を求めよ．

答 $g_\xi(z) = \dfrac{1}{z+a} e^{-iz\xi}$ とおく．$z = -a$ が 1 位の極であり，

$$\mathrm{Res}(g_\xi; -a) = \lim_{z\to -a} e^{-iz\xi} = e^{ia\xi}$$

である．$-a$ は下半平面にあるから，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x+a} e^{-ix\xi}\, dx = \begin{cases} -2\pi i e^{ia\xi} & (\xi > 0) \\ 0 & (\xi < 0). \end{cases}$$ □

3.7 急減少関数列の収束

最後に，急減少関数列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対してある種の収束の概念を導入しておく．これは次章で学ぶ超関数の理論に必要な概念である．

定義 3.2 関数列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ が $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に $\mathcal{S}$ **の意味で収束する**とは，任意の $N \in \mathbf{Z}_+$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty} |\varphi_j - \varphi|_N = 0$$

なることである．また，φ_j が φ に $\mathcal{S}$ の意味で収束することを単に

$$\varphi_j \to \varphi \quad \text{in } \mathcal{S} \qquad (j \to \infty)$$

なる記号で表すことにする．

たとえば，次の関数列は $\mathcal{S}$ の意味で 0 に収束している．

例題 3 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とし，$\varphi_j(x) = (1/j)\varphi(x)$ とすると，次が成り立つ:

$$\varphi_j \to 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \qquad (j \to \infty).$$

証明 $k + |\alpha| \leqq N$ のとき，

$$(1+|x|)^k |\partial^\alpha \varphi_j(x)| = \frac{1}{j}(1+|x|)^k |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

ゆえに,

$$|\varphi_j|_N \leqq j^{-1}|\varphi|_N \to 0 \qquad (j \to \infty). \qquad \square$$

複素数全体のなす集合 $\mathbf{C}$ が**完備**であること，すなわち複素数列はコーシー列であるとき収束列になっていることがよく知られている．$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ もこれに類似した性質をもっている．

定理 3.30 $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ $(j=1,2,\dots)$ が，$\varphi_j - \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$ $(j,k \to \infty)$ を満たすならば，ある $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ が存在し，$\varphi_j - \varphi \to 0$ in $\mathcal{S}$ $(j \to \infty)$ が成り立つ．

証明 任意の自然数 N をとり固定する．このとき，$|\varphi_j - \varphi_k|_N \to 0$ $(j,k \to \infty)$ であるから，部分列 $\{\varphi_{j(l)}\}$ を $|\varphi_{j(l+1)} - \varphi_{j(l)}|_N < 2^{-l}$ $(l = 0,1,2,\dots)$ となるように選ぶことができる．$\psi_l = \varphi_{j(l)}$ とおく．明らかに任意の $x \in \mathbf{R}^d$ に対して $|\psi_l(x) - \psi_m(x)| \to 0$ $(l,m \to \infty)$ である．ゆえに，$\mathbf{C}$ の完備性より，各 $x \in \mathbf{R}^d$ に対して，ある $\psi(x) \in \mathbf{C}$ が存在し

$$\lim_{l\to\infty} \psi_l(x) = \psi(x) \tag{3.19}$$

となる．(3.19) より

$$\begin{aligned}\psi(x) - \psi_l(x) &= \lim_{n\to\infty}(\psi_n(x) - \psi_l(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=l}^{n-1}(\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \\ &= \sum_{k=l}^{\infty}(\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \qquad (x \in \mathbf{R}^d).\end{aligned}$$

ゆえに

$$|\psi - \psi_l|_0 \leqq \sum_{k=l}^{\infty}|\psi_{k+1} - \psi_k|_0 \leqq 2^{1-l} \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

が成り立つ．したがって，ψ は $\mathbf{R}^d$ 上で連続である．

$R > 0$ を任意にとり $I_R = [-R,R] \times \cdots \times [-R,R]$ (d 個の $[-R,R]$ の直積) とする．

$|\alpha| = 1$ なる α を考え，$\partial^\alpha \psi_l$ に対して以上と同じ議論を繰り返せば，$\mathbf{R}^d$ 上のある連続関数 $\psi^{(\alpha)}$ が存在し

$$|\psi^{(\alpha)} - \partial^\alpha \psi_l|_0 \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

となり，各 I_R 上で $\partial^\alpha \psi_l$ は $\psi^{(\alpha)}$ に一様収束している．したがって，項別微分定理 ([杉浦, p.310] あるいは定理 1.16) を用いれば，ψ は各 I_R 上で C^1 級であり $\partial^\alpha \psi = \psi^{(\alpha)}$ となることがわかる．したがって，$\psi \in C^1(\mathbf{R}^d)$ かつ $\partial^\alpha \psi = \psi^{(\alpha)}$ が $\mathbf{R}^d$ 上でも成り立っている．この議論を繰り返し使って，結局 $\psi \in C^N(\mathbf{R}^d)$ であることがわかる．

さらに

$$|\psi - \psi_l|_N \leqq \sum_{k=l}^{\infty} |\psi_{k+1} - \psi_k|_N \leqq 2^{1-l} \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

が得られる．これより $|\psi|_N < \infty$ も成り立つ．

次に，$|\varphi_k - \psi|_N \to 0$ $(k \to \infty)$ を示そう．任意の φ_k に対して $k < j(l)$ なる $j(l)$ を一つとり，それを j_k とおく．このとき，

$$|\varphi_k - \psi|_N \leqq |\varphi_k - \varphi_{j_k}|_N + |\varphi_{j_k} - \psi|_N$$

であるが，$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ がコーシー列であるという仮定より $|\varphi_k - \varphi_{j_k}|_N \to 0$ $(k \to \infty)$ である．また，すでに証明したように $|\varphi_{j_k} - \psi|_N \to 0$ $(k \to \infty)$ である．ゆえに

$$\lim_{k \to \infty} |\varphi_k - \psi|_N = 0$$

が得られる．ここで N は任意の非負整数をとってあるので，$\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ かつ $\varphi_k \to \psi$ in $\mathcal{S}$ $(k \to \infty)$ となることは容易に示すことができる．　□

4 章

緩増加超関数とフーリエ変換

$\mathbf{R}^d$ 上の可積分関数 f に対して，フーリエ変換

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx \tag{4.1}$$

は定義される．しかし，f が $\mathbf{R}^d$ 上で積分可能でない場合フーリエ変換を定義する積分 (4.1) そのものの意味がなくなり，フーリエ変換を定義することができなくなってしまう．たとえば，定数関数 $f(x) \equiv 1$ や，$\mathbf{R}$ 上で定義される**ヘヴィサイド関数**とよばれる (工学で重要な) 関数

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases} \tag{4.2}$$

などのフーリエ変換は考えられなくなってしまう．しかし，L. Schwartz (シュワルツ) は，関数の概念を拡張した「超関数」の考え方を使えば，(定数関数やヘヴィサイド関数をはじめ) 多くの可積分ではない関数のフーリエ変換を考えることができることを示した．ただし，そういった関数をフーリエ変換すると，しばしばそれはもはや「関数」ではなく「超関数」になってしまう．

まず超関数とは何かを学んでいこう．

4.1 緩増加超関数の定義

$\mathbf{R}^d$ の各点 x に対して複素数あるいは $\pm\infty$ がある規則 f によって対応しているとき，x に対応させる値を $f(x)$ と表し，規則 f を $\mathbf{R}^d$ 上の関数といった．この関数の定義に基づいて解析学は発展してきた．しかし，1929 年にイギリスの物理学者 P.Dirac は，量子力学を記述するには，関数の従来の定義にはなじまない次のような "擬似的な関数" $\delta(x)$ が必要であることを唱えた[1)]:

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \quad \text{であり，} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

[1)] ディラック著「量子力学」(朝永他訳)，岩波書店.

なぜこれが関数としておかしい点があるのかというと，一点 $\{0\}$ の測度は 0 であるから，$\delta(x)=0\ (x\neq 0)$ より，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=0$$

でなければならないからである．したがって，$\delta(x)$ は，従来の意味での関数の定義はあてはまらない．しかし，Dirac は $\delta(x)$ に関するさまざまな形式的な計算を行って，量子力学の研究を進めていった．

1950 年，フランスの数学者 L. Schwartz は，Dirac の提案以来懸案であった $\delta(x)$ およびそれに関する計算の数学的な定義づけに成功した．それが，本章で学ぶ超関数である．超関数の定義を天下り的に述べてもよいが，やはりその前に Schwartz の考え方をおおまかに述べておいたほうがよいだろう．

4.2 Schwartz の発想と緩増加超関数の定義

Schwartz の考え方はこうである．もし，$\delta(x)=0\ (x\neq 0)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$ が正当化されているとするならば，任意の $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，$\delta(x)=0$ $(x\neq 0)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\,dx=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=f(0) \tag{4.3}$$

を満たしている．また，$\delta(x)$ の微分 $\delta'(x)$ は，形式的に部分積分をすれば次の式を満たす:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x)\,dx&=\big[\delta(x)f(x)\big]_{x=-\infty}^{x=\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f'(x)\,dx\\&=-f'(0).\end{aligned} \tag{4.4}$$

高階の微分に対しても同様にして，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\partial^{\alpha}\delta(x)f(x)\,dx=(-1)^{|\alpha|}\partial^{\alpha}f(0) \tag{4.5}$$

となる．Schwartz は，このような形式的な計算を考慮に入れることにより，δ を関数として定義するのではなく，むしろ (4.3) を満たす写像として定義することを考え出した．すなわち，δ を

$$\delta\,:\,\mathcal{S}(\mathbf{R})\ni f\mapsto f(0)$$

なる写像とみなしたのである．また，δ の微分は (4.4) に基づき

$$\delta' \ : \ \mathcal{S}(\mathbf{R}) \ni f \mapsto -f'(0)$$

と考えたのである．

そして，この考察をより高い立場から見直し，$\mathcal{S}(\mathbf{R})$ から $\mathbf{C}$ への写像をあたかも関数としてみなすような数学の理論をつくった．それが“超関数の理論”である．しかし，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ から $\mathbf{C}$ への写像をすべて扱うことはあまり意味がなく，十分満足のいく数学的理論は期待できない．そこで Schwartz は，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ から $\mathbf{C}$ への写像でいくつかの条件を満たすものを「超関数」とよび，その条件を使って超関数の理論を組み立てた．

本書では，超関数の中から特にフーリエ解析とかかわりの深い緩増加超関数について学ぶ．

定義 4.1 (緩増加超関数) F が**緩増加超関数**とは，次の (i), (ii) を満たす $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ から $\mathbf{C}$ への写像のことである．

(i) (線形性): $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ に対して

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g).$$

(ii) (連続性): $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ $(j \to \infty)$ であれば次が成り立つ:

$$F(\varphi_j) \to F(\varphi) \qquad (j \to \infty).$$

以下では，慣習に従って，$F(\varphi)$ を $\langle F, \varphi \rangle$ と表すことにし，$\mathbf{R}^d$ 上の緩増加超関数全体のなす集合を $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ とおく．なお $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に属する関数を**試料関数**または**テスト関数**とよぶことがある．

なお定義 4.1 の条件 (i) があれば，(ii) は次の (ii)$'$ と同値になる:

(ii)$'$ $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ $(j \to \infty)$ であれば，$F(\varphi_j) \to 0$ $(j \to \infty)$.

4.3 緩増加超関数の例

▶ **例 1** $1 \leqq p \leqq \infty$ とし，$f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ とする．

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

により F_f を定義すると $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である[2]．

[2] じつは f と F_f をある意味で同一視できるのである．定理 A.5 参照．

証明 $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする. $p=1$ の場合は,

$$\begin{aligned}|\langle F_f, \varphi_j\rangle - \langle F_f, \varphi\rangle| &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|\,|\varphi_j(x)-\varphi(x)|\,dx \\ &\leqq |\varphi_j - \varphi|_0 \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|\,dx \to 0 \qquad (j\to\infty).\end{aligned}$$

ゆえに $F_f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である.

$1<p\leqq\infty$ の場合は, q を $1/p+1/q=1$ を満たすものとし, ヘルダーの不等式 (定理 1.18 参照) と補題 3.1 の証明の最後の部分で得た不等式を使うと, 次が得られる:

$$\begin{aligned}|\langle F_f, \varphi_j\rangle - \langle F_f, \varphi\rangle| &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|\,|\varphi_j(x)-\varphi(x)|\,dx \\ &\leqq \|f\|_p\,\|\varphi_j-\varphi\|_q \\ &\leqq C_{q,d}\|f\|_p\,|\varphi_j-\varphi|_k \to 0\end{aligned}$$

(ただし, $k>d/q$ とする). よって $f\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である. □

▶ **例 2 (緩増加関数)** $\mathbf{R}^d$ 上の連続関数 $f(x)$ で, ある正定数 C とある正の整数 N が存在して

$$|f(x)| \leqq C(1+|x|)^N \qquad (x\in\mathbf{R}^d)$$

を満たすものを**緩増加連続関数**という. 特に $f(x)$ が $\mathbf{R}^d$ 上の C^∞ 関数で, しかも任意の $\alpha\in\mathbf{Z}_+^d$ に対してある $N(\alpha)\in\mathbf{Z}_+$ とある正の定数 C_α が存在し,

$$|D^\alpha f(x)| \leqq C_\alpha(1+|x|)^{N(\alpha)} \qquad (x\in\mathbf{R}^d)$$

を満たしているとき, $f(x)$ を**緩増加関数**という. たとえば, 多項式 $\sum_{|\alpha|\leqq N} a_\alpha x^\alpha$ $(a_\alpha\in\mathbf{C})$ や $e^{ix\cdot\xi}$ は x に関する緩増加関数である.

$f(x)$ が緩増加連続関数であるとき, $F_f\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である.

証明 $|\langle F_f, \varphi_j\rangle - \langle F_f, \varphi\rangle|$

$$\begin{aligned}&\leqq \int_{\mathbf{R}^d} C(1+|x|)^N(1+|x|)^{-N-d-1}(1+|x|)^{N+d+1}|\varphi_j(x)-\varphi(x)|\,dx \\ &\leqq C\left(\int_{\mathbf{R}^d}(1+|x|)^{-d-1}dx\right)\cdot|\varphi_j-\varphi|_{N+d+1}\to 0 \quad (j\to\infty).\end{aligned}$$ □

▶ **例 3 (ディラックの δ 関数)**

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0) \qquad (\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

とすると, $\delta\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である. δ を**ディラックの δ 関数**という.

証明 $|\langle \delta, \varphi_j \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi_j(0) - \varphi(0)| \leqq |\varphi_j - \varphi|_0 \to 0 \qquad (j \to \infty).$ □

▶ **例 4 (コーシーの主値)** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して,

$$\left\langle \text{p.v.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \tag{4.6}$$

と定義すると, $\text{p.v.}\,\dfrac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ である. これを**コーシーの主値**という.

証明 まず, 右辺の極限の存在を証明する.

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon<|x|\leqq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$
$$=: I_{1,\varepsilon} + I_2$$

とおく. 補題 3.1 の証明より

$$|I_2| \leqq \int_{|x|>1} |\varphi(x)|\,dx \leqq \|\varphi\|_1 \leqq C|\varphi|_2$$

である. 一方,

$$\int_{\varepsilon<|x|\leqq 1} \frac{1}{x}\,dx = 0$$

に注意すれば,

$$I_{1,\varepsilon} = \int_{\varepsilon<|x|\leqq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{\varepsilon<|x|\leqq 1} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx$$
$$= \int_{\varepsilon<|x|\leqq 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon<|x|\leqq 1} \left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt \right) dx.$$

ゆえに,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_{1,\varepsilon} = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt \right) dx.$$

これより (4.6) の右辺の極限の存在が証明される.

次に $\text{p.v.}\dfrac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ を示す.

$$\left| \lim_{\varepsilon \to 0} I_{1,\varepsilon} \right| \leqq \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 |\varphi'(tx)|\,dt \right) dx$$
$$\leqq \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 dt \right) dx \cdot |\varphi|_1 = 2|\varphi|_1.$$

したがって,

$$\left| \left\langle \text{p.v.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \right| \leqq (C+2)|\varphi|_2$$

である．ゆえに $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ ならば

$$\left|\left\langle \mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}, \varphi_j \right\rangle - \left\langle \mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle\right| \leqq (C+2)|\varphi_j - \varphi|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

となり，$\mathrm{p.v.}\dfrac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ がわかる． □

4.4 緩増加超関数の微分，フーリエ変換，合成積

本節では，緩増加超関数に対して，その微分，フーリエ変換，合成積などを定義する．以下でみるように，これらはテスト関数の微分，フーリエ変換，合成積に帰着させて定義する．

4.4.1 緩増加超関数の微分

本節では緩増加超関数の微分を定義する．

$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，$\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であった．したがって，部分積分の公式から，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle F_{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^d} \partial^\alpha f(x) \cdot \varphi(x)\, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) \cdot \partial^\alpha \varphi(x)\, dx \\ &= \langle F_f, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \rangle\end{aligned}$$

が成り立っている．そこで，このことをふまえて，$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ の微分 $\partial^\alpha F$ を，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\langle F, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \rangle$ を対応させる写像として定義する．すなわち，

$$\langle \partial^\alpha F, \varphi \rangle = \langle F, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

である．このように定義した $\partial^\alpha F$ を F の**超関数の意味での微分**という．

また，$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ に対して，$D^\alpha F$ を次のように定める:

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle = \langle F, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)).$$

定義から明らかに，$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であれば $\partial^\alpha F_f = F_{\partial^\alpha f}$, $D^\alpha F_f = F_{D^\alpha f}$ となっている．

定理 4.1 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ ならば，$\partial^\alpha F$, $D^\alpha F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である．

証明 $\partial^\alpha F$ についても $D^\alpha F$ についても同様に証明できるので，前者のみ証明する．

$\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ $(j \to \infty)$ であれば

$$(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi_j \to (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi \ \text{ in } \mathcal{S} \quad (j \to \infty).$$

なぜならば，

$$|(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi_j - (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi|_N \leqq |\varphi_j - \varphi|_{N+|\alpha|} \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

したがって，

$$\langle F, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi_j\rangle \to \langle F, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi\rangle$$

となっている． □

この超関数の定義に基づいて，従来の意味では微分できなかった関数を超関数の意味で微分するとどうなるかを調べてみよう．

例題 H を (4.2) で定義されたヘヴィサイド関数とすると，$F_H \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ であり，

$$\partial F_H = \delta$$

である．ただし，ここで ∂ は $\alpha = 1 \in \mathbf{Z}_+$ に対して定義された超関数の意味での微分 ∂^1 を表す．したがって，**ヘヴィサイド関数の超関数の意味での微分はディラックの δ 関数になっている．**

証明 $$\langle \partial F_H, \varphi\rangle = -\langle H, \partial\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})).$$

ゆえに $\partial F_H = \delta$ である． □

4.4.2 緩増加超関数の平行移動と縮小・拡大・反転

$\mathbf{R}^d$ 上の関数 φ に対して $\varphi_t(x) = t^{-d}\varphi(x/t)$ と定める．このとき，$f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，次のことを容易に示すことができる:

$$\int_{\mathbf{R}^d} (f \circ \tau_h(x))\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi \circ \tau_{-h}(x)\,dx \quad (h \in \mathbf{R}^d),$$

$$\int_{\mathbf{R}^d} (f \circ d_t(x))\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi_t(x)\,dx \quad (t > 0),$$

$$\int_{\mathbf{R}^d} f^\vee(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi^\vee(x)\,dx.$$

このことを考慮に入れて，緩増加超関数 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ に対して，$\tau_h F$, $d_t F$, $F^\vee$ を次のように定義する:

$$\langle \tau_h F, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \circ \tau_{-h} \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d),\ h \in \mathbf{R}^d),$$
$$\langle d_t F, \varphi \rangle = \langle F, \varphi_t \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d),\ t > 0),$$
$$\langle F^\vee, \varphi \rangle = \langle F, \varphi^\vee \rangle.$$

この定義から，$\tau_h F \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $d_t F \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $F^\vee \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ となることは容易に証明できる.

4.4.3 緩増加超関数のフーリエ変換

補題 3.8 より，$f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle F_{\mathcal{F}[f]}, \varphi \rangle &= \int \mathcal{F}[f](x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int f(x)\mathcal{F}[\varphi](x)\,dx = \langle F_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle.\end{aligned}$$

そこで，$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[F]$ を

$$\langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

で定義する．また，逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}[F]$ を

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[F], \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

により定義する.

定理 4.2 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ ならば，$\mathcal{F}[F] \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{F}^{-1}[F] \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である.

証明 $\mathcal{F}[F] \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ を示す．$\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ とすると，命題 3.5 より

$$|\mathcal{F}[\varphi_j] - \mathcal{F}[\varphi]|_N \leqq C_{d,N}|\varphi_j - \varphi|_{d+1+2N} \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

ゆえに，$\mathcal{F}[\varphi_j] \to \mathcal{F}[\varphi]$ in $\mathcal{S}$ である．したがって，

$$\langle \mathcal{F}[F], \varphi_j \rangle \to \langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle$$

がわかる．したがって，$\mathcal{F}[F] \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である.

同様にして，$\mathcal{F}^{-1}[F] \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ も示すことができる. □

定理 4.3 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ のとき，次が成り立つ:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[F]] = F.$$

証明 定義 4.3 より

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F]], \varphi\rangle &= \langle \mathcal{F}[F], \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle \\ &= \langle F, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle = \langle F, \varphi\rangle \qquad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)).\end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F]] = F$ である．残りの主張も同様に示すことができる． □

$f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ であれば $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ であるから，超関数としてのフーリエ変換 $\mathcal{F}[F_f]$ を考えることができる．一方，L^1 関数としてのフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ も定義できる．$\mathcal{F}[f]$ は有界な連続関数であるから，$F_{\mathcal{F}[f]} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である．このとき

$$\mathcal{F}[F_f] = F_{\mathcal{F}[f]}$$

が成り立つ．実際，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，フビニの定理より

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[F_f], \varphi\rangle &= \langle F_f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(\xi)\mathcal{F}[\varphi](\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(\xi)\left(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\, d\xi\right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(\xi)e^{-ix\cdot\xi}\, d\xi\right) \varphi(x)\, dx \\ &= \left\langle F_{\mathcal{F}[f]}, \varphi\right\rangle\end{aligned}$$

となっている．

$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ に対しても，L^2 関数としてのフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ と超関数としてのフーリエ変換 $\mathcal{F}[F_f]$ が定義されている．この場合も

$$\mathcal{F}[F_f] = F_{\mathcal{F}[f]}$$

が成り立っている．このことを証明する．$f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ で $\|f_n - f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものを考える．任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[F_f], \varphi\rangle &= \int_{\mathbf{R}^d} f(\xi)\mathcal{F}[\varphi](\xi)\, d\xi = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} f_n(\xi)\mathcal{F}[\varphi](\xi)\, d\xi \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[f_n](\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\cap^d} \mathcal{F}[f](\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \\ &= \left\langle F_{\mathcal{F}[f]}, \varphi\right\rangle\end{aligned}$$

である．

4.4.4 緩増加超関数のフーリエ変換と微分

緩増加関数 f と超関数 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ との積 fF を，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に $\langle F, f\varphi \rangle$ を対応させる写像として定義する:

$$\langle fF, \varphi \rangle = \langle F, f\varphi \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)).$$

また，超関数 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と緩増加関数 f との積 Ff も $Ff = fF$ により定義する．このとき，次が成り立つ．

定理 4.4 f を緩増加関数とし，$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき，$fF, Ff \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である．

証明 $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ とし，$k \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ とする．緩増加関数の定義より，ある $l \in \mathbf{Z}_+$ が存在し，$|\partial^\beta f(x)| \leqq C(1+|x|)^l$ $(\beta \leqq \alpha,\ x \in \mathbf{R}^d)$ なる定数 C が存在する．ゆえに，

$$\begin{aligned}(1+|x|)^k |\partial^\alpha (f(\varphi_j - \varphi))(x)| &\leqq (1+|x|)^k \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left| \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta}(\varphi_j - \varphi)(x) \right| \\ &\leqq C|\varphi_j - \varphi|_{k+l+|\alpha|},\end{aligned}$$

ただし，ここで C は，d, k, α, f にのみ依存した正定数としてとれる．したがって，$f\varphi_j \to f\varphi$ in $\mathcal{S}$ $(j \to \infty)$ となることがわかる．よって $fF \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である． □

x^α は緩増加関数であることより，次の定理が示される．

定理 4.5 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ とするとき，次が成り立つ:

$$\mathcal{F}[D^\alpha F] = x^\alpha \mathcal{F}[F].$$

証明
$$\langle \mathcal{F}[D^\alpha F], \varphi \rangle = \langle D^\alpha F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle F, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [\mathcal{F}[\varphi]] \rangle, \qquad =: (*)$$

ここで，

$$D^\alpha [\mathcal{F}[\varphi]](\xi) = (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ix\cdot\xi} x^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha \varphi(x)].$$

したがって，

$$(*) = \langle F, \mathcal{F}[x^\alpha \varphi(x)] \rangle = \langle \mathcal{F}[F], x^\alpha \varphi(x) \rangle = \langle x^\alpha \mathcal{F}[F], \varphi \rangle.$$ □

4.4.5 緩増加超関数の合成積とフーリエ変換

本項では，緩増加超関数と $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に属する関数との合成積を定義する．そのため，次の準備的な考察からはじめる: $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\langle F_{f*g}, h\rangle &= \int_{\mathbf{R}^d} f*g(x)h(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy\right)h(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbf{R}^d} h(x)g(x-y)\,dx\right)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbf{R}^d} g(-z)h(y-z)\,dz\right)dy \qquad (-z=x-y) \\ &= \langle F_f, g^\vee * h\rangle.\end{aligned}$$

そこで，$F\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，その**合成積** $F*\varphi$ を

$$\langle F*\varphi, \psi\rangle = \langle F, \varphi^\vee * \psi\rangle \qquad (\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

により定義する．命題 3.12 より明らかに $F*\varphi\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である．また $f,g\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して $f*g=g*f$ であることに注意して，$\varphi*F$ を $\varphi*F=F*\varphi$ により定義する．

さて，$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であるならば，$\mathcal{F}[\varphi]\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であるから，定理 4.4 より $\mathcal{F}[\varphi]$ と $F\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ との積 $F\mathcal{F}[\varphi]\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ が定義できる．さらに次の定理が成り立つ．

定理 4.6 $F\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，次が成り立つ:

$$\mathcal{F}[F*\varphi] = \mathcal{F}[F]\mathcal{F}[\varphi].$$

証明 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき，

$$\langle\mathcal{F}[F*\varphi],\psi\rangle = \langle F*\varphi, \mathcal{F}[\psi]\rangle = \langle F, \varphi^\vee * \mathcal{F}[\psi]\rangle$$

である．ここで，

$$\varphi^\vee * \mathcal{F}[\psi] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\varphi^\vee * \mathcal{F}[\psi]]$$

に注意する．また，次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\varphi^\vee * \mathcal{F}[\psi]] &= (2\pi)^{-d}\mathcal{F}[(\varphi^\vee * \mathcal{F}[\psi])^\vee] = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}[\varphi * (\mathcal{F}[\psi]^\vee)] \\ &= (2\pi)^{-d}\mathcal{F}[\varphi]\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]^\vee] = \mathcal{F}[\varphi]\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\psi]] \\ &= \mathcal{F}[\varphi]\psi.\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\langle F, \varphi^\vee * \mathcal{F}[\psi]\rangle = \langle F, \mathcal{F}\,[\mathcal{F}[\varphi]\psi]\rangle = \langle\mathcal{F}[F], \mathcal{F}[\varphi]\psi\rangle = \langle\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[\varphi], \psi\rangle$$

となり，定理が証明された. □

4.5 緩増加超関数列の収束

緩増加超関数の列 $F_j \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ が，ある $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ に**超関数の意味で収束**あるいは**$\mathcal{S}'$ の意味で収束する**とは，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\lim_{j\to\infty} \langle F_j, \varphi\rangle = \langle F, \varphi\rangle$$

が成り立つことである．このことを記号 $F_j \to F$ in $\mathcal{S}'$ $(j\to\infty)$ と表す.

次の定理は有用である.

定理 4.7 $F_j \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ $(j=1,2,\cdots)$ が，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，極限

$$\lim_{j\to\infty} \langle F_j, \varphi\rangle \in \mathbf{C}$$

をもつとする．このとき，ある $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ で，$F_j \to F$ in $\mathcal{S}'$ $(j\to\infty)$ となるものが存在する.

証明 [3] 各 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，$F(\varphi) = \lim_{j\to\infty} \langle F_j, \varphi\rangle$ とおく．F により φ に $F(\varphi)$ を対応させる写像を表す．明らかに F は定義 4.1 (i) を満たす．以下では，定義 4.1 (ii) を満たすことを証明するが，もし (ii) が成り立たなかったとして矛盾を導く．もし (ii) が成り立たなければ，ある $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ $(j=1,2,\cdots)$ とある $\varepsilon>0$ が存在し，$\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ $(j\to\infty)$ かつ $|F(\varphi_j)| \geqq \varepsilon$ を満たす．必要ならば部分列 $\{\varphi_{n_j}\}$ をとり，φ_{n_j} を改めて φ_j とおくことにより

$$|\varphi_j|_j \leqq 2^{-2j} \qquad (j=1,2,\cdots)$$

とできる．$\psi_k = 2^k\varphi_k$ とおくと，次のことが成り立つ:

$$|\psi_j|_j \leqq 2^{-j}, \qquad |F(\psi_j)| \geqq 2^j\varepsilon.$$

このとき，任意の非負整数 N に対して，$|\psi_j|_N \leqq |\psi_j|_j \to 0$ $(N<j\to\infty)$ より，$\psi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ $(j\to\infty)$ である．また，十分大きな j_1 を $|F(\psi_{j_1})| \geqq 2^{j_1}\varepsilon > 1$ となるように選べば，十分大きな m_1 に対して，$|\langle F_{m_1}, \psi_{j_1}\rangle| > 1$ とできる．一方，$F_{m_1} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ であるから，$j_2 > j_1$ を $|\langle F_{m_1}, \psi_{j_2}\rangle| < 2^{-1}$ となるように選ぶことができる．$\{\langle F_m, \psi_{j_1}\rangle\}_{m=1}^{\infty}$ は収束数列であるから，必要ならば j_2 をさらに大きくとることにより

$$|F(\psi_{j_2})| \geqq 2^{j_2}\varepsilon > \sup_m |\langle F_m, \psi_{j_1}\rangle| + 2$$

---

[3] 一般には線形位相空間に関する定理を使って証明されるが，この初等的な証明は [垣田] によった.

とすることができる．このとき，十分大きな $m_2 > m_1$ を

$$|\langle F_{m_2}, \psi_{j_2}\rangle| > \sup_m |\langle F_m, \psi_{j_1}\rangle| + 2 \geqq |\langle F_{m_2}, \psi_{j_1}\rangle| + 2$$

となるように選べる．次に，$j_3 > j_2$ を $|\langle F_{m_1}, \psi_{j_3}\rangle|, |\langle F_{m_2}, \psi_{j_3}\rangle| < 2^{-2}$ となるようにとる．必要ならば j_3 をさらに大きくとって，

$$|F(\psi_{j_3})| \geqq 2^{j_3}\varepsilon > \sup_m |\langle F_m, \psi_{j_2}\rangle| + \sup_m |\langle F_m, \psi_{j_1}\rangle| + 3$$

となるようにしておくと，十分大きな $m_3 > m_2$ を

$$\begin{aligned}|\langle F_{m_3}, \psi_{j_3}\rangle| &> \sup_m |\langle F_m, \psi_{j_2}\rangle| + \sup_m |\langle F_m, \psi_{j_1}\rangle| + 3\\ &\geqq |\langle F_{m_3}, \psi_{j_2}\rangle| + |\langle F_{m_3}, \psi_{j_1}\rangle| + 3\end{aligned}$$

となるようにとることができる．以上より

$$\begin{aligned}&|\langle F_{m_1}, \psi_{j_2}\rangle| < 2^{-1},\\ &|\langle F_{m_l}, \psi_{j_3}\rangle| < 2^{-2} \qquad (l = 1, 2),\\ &|\langle F_{m_2}, \psi_{j_2}\rangle| > |\langle F_{m_2}, \psi_{j_1}\rangle| + 2,\\ &|\langle F_{m_3}, \psi_{j_3}\rangle| > |\langle F_{m_3}, \psi_{j_2}\rangle| + |\langle F_{m_3}, \psi_{j_1}\rangle| + 3\end{aligned}$$

となっている．この操作を続ければ，$F_{m_1}, F_{m_2}, \cdots \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $\psi_{j_1}, \psi_{j_2}, \cdots \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ を

$$\begin{aligned}&|\langle F_{m_l}, \psi_{j_k}\rangle| \leqq 2^{-k+1} \qquad (l = 1, \cdots, k-1), \quad k \geqq 2,\\ &|\langle F_{m_l}, \psi_{j_l}\rangle| > \sum_{k=1}^{l-1} |\langle F_{m_l}, \psi_{j_k}\rangle| + l, \qquad l \geqq 2\end{aligned}$$

を満たすように選べる．このとき，任意の自然数 N に対して，$l, m \to \infty$ のとき

$$\left|\sum_{k=l}^m \psi_{j_k}\right|_N \leqq \sum_{k=l}^m |\psi_{j_k}|_N \leqq \sum_{k=l}^m 2^{-j_k} \to 0$$

である．したがって $\psi = \sum_{k=1}^\infty \psi_{j_k} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ が成り立つ．ところで

$$\langle F_{m_l}, \psi\rangle = \sum_{k=1}^{l-1} \langle F_{m_l}, \psi_{j_k}\rangle + \langle F_{m_l}, \psi_{j_l}\rangle + \sum_{k=l+1}^\infty \langle F_{m_l}, \psi_{j_k}\rangle$$

より，

$$\begin{aligned}|\langle F_{m_l}, \psi\rangle| &\geqq |\langle F_{m_l}, \psi_{j_l}\rangle| - \sum_{k=1}^{l-1} |\langle F_{m_l}, \psi_{j_k}\rangle| - \sum_{k=l+1}^\infty |\langle F_{m_l}, \psi_{j_k}\rangle|\\ &\geqq l - \sum_{k=l+1}^\infty 2^{-k+1} > l - 1 \to \infty \qquad (l \to \infty).\end{aligned}$$

このことは，$\lim_{l\to\infty} \langle F_{m_l}, \psi\rangle$ の存在の仮定に反する．よって定理が証明された． □

4.6 緩増加超関数のフーリエ変換の例

緩増超関数のフーリエ変換の計算例をいくつか示しておく.

▶ **例 5** 定数関数 1 のフーリエ変換 $\mathcal{F}[1]$ はディラックの δ 関数の $(2\pi)^d$ 倍である. すなわち, $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^d\delta$ となる.

証明 1 は可積分関数ではないので $\left(\int_{\mathbf{R}^d} 1\,dx = +\infty\right)$, $\mathcal{F}[1]$ とは 1 を $F_1 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と考えてフーリエ変換 $\mathcal{F}[F_1]$ したものである. $\mathcal{F}[F_1] \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である. したがって, 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[1], \varphi\rangle &= \langle 1, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\,d\xi \\ &= (2\pi)^d \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]](0) = (2\pi)^d\varphi(0) = \langle (2\pi)^d\delta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

ゆえに $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^d\delta$ であることがわかる. □

$a \in \mathbf{R}^d$ とし, $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$ $(\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$ とすると, $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ である. これを **a に台をもつディラックの δ 関数**という. また, $d = 1$ のとき δ_a は a に台をもつ**パルス波**ともいわれる.

▶ **例 6** $E_a(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}$ $(\xi \in \mathbf{R}^d)$ とおくと, $\mathcal{F}[\delta_a] = E_a$ となる. (正確には $\mathcal{F}[\delta_a] = F_{E_a}$ である. しかし F_{E_a} のことを単に E_a と書いている.)

証明 $\langle \mathcal{F}[\delta_a], \varphi\rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \mathcal{F}[\varphi](a) = \int e^{-ia\cdot\xi}\varphi(\xi)\,d\xi = \langle F_{E_a}, \varphi\rangle.$ □

▶ **例 7 (ディラックの櫛)** $T > 0$ とする. 周期的にパルス波の現れる超関数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}$ を**ディラックの櫛**という. 後節でみるように, ディラックの櫛のフーリエ変換はサンプリング理論で重要な役割を果たす. まず次のことを証明する.

命題 4.8 $T > 0$ とする. このとき,

(1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ である.

(2) $b_k \in \mathbf{C}$ $(k \in \mathbf{Z})$ で, ある自然数 A と正数 C が存在し, $|b_k| \leqq C|k|^A$ $(k \in \mathbf{Z})$ とする. このとき, 重みを付けたディラックの櫛 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\delta_{kT}$ も $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ に属する.

証明 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して $\left\langle \sum_{k=-N'}^{N} \delta_{kT}, \varphi \right\rangle = \sum_{k=-N'}^{N} \varphi(kT)$ であり，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ と (3.6) より，右辺の級数は $N, N' \to \infty$ にしたとき絶対収束している．したがって，定理 4.7 より (1) が得られる．

次に，(2) を示す．まず次のことに注意する:

$$\left\langle \sum_{k=-N'}^{N} b_k \delta_{kT}, \varphi \right\rangle = \sum_{k=-N'}^{N} b_k \varphi(kT).$$

このとき，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k \varphi(kT)| < \infty,$$

ただしこの不等式は b_k に関する仮定，および φ が急減少関数であることによる．ゆえに，定理 4.7 より (2) が証明される． □

ディラックの櫛のフーリエ変換を計算するために，少し準備をしておく．$a \in \mathbf{R}$ に対して $E_a(\xi) = e^{-ia\xi}$ とおく．$\omega > 0$ とすると，例 6 より，

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-N}^{N} \delta_{k\omega}\right] = \sum_{k=-N}^{N} E_{k\omega} = \sum_{k=-N}^{N} E_{-k\omega}. \tag{4.7}$$

さて，定理 1.2 の証明から $\sum_{k=-N}^{N} E_{-k\omega}$ はディリクレ核 D_N と等しい．したがって，

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-N}^{N} \delta_{k\omega}\right](\xi) = D_N(\xi) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\omega\xi}{\sin\frac{\omega\xi}{2}}. \tag{4.8}$$

この等式を使って，ディラックの櫛のフーリエ変換を計算する．

定理 4.9 (ポアソンの総和公式) $\omega > 0$ とする．このとき，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_{k\omega} = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\omega}\right] = \frac{2\pi}{\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi/\omega} \tag{4.9}$$

が成り立つ．

証明 一番目の等式は (4.7) より明らかであるから，二番目の等式を証明する．$\ell = \pi/\omega$ とおく．D_N は周期 2ℓ の関数である．これより，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して，

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=-N}^{N} \delta_{k\omega}\right],\ \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} D_N(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{(2n-1)\ell}^{(2n+1)\ell} D_N(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_{-\ell}^{\ell} D_N(\xi)\varphi(\xi+2n\ell)\,d\xi.$$

したがって

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=-N}^{N} \delta_{k\omega}\right], \varphi \right\rangle = 2\ell s_N \left[\sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \varphi(\cdot + 2n\ell)\right](0). \tag{4.10}$$

ここで $\sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \varphi(\xi+2n\ell)$ は周期 2ℓ の C^∞ 級関数であるから，定理 1.11 より

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\omega}\right], \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\omega}, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{k=-N}^{N} \delta_{k\omega}, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=-N}^{N} \delta_{k\omega}\right], \varphi \right\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} 2\ell s_N \left[\sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \varphi(\cdot+2n\ell)\right](0) = 2\ell \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \varphi(2n\ell)$$

$$= \left\langle 2\ell \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \delta_{2n\ell}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{2\pi}{\omega} \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \delta_{2n\pi/\omega}, \varphi \right\rangle.$$

ここで後述の補題 4.10 を用いれば，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\omega}\right], \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{2\pi}{\omega} \sum_{n\in\boldsymbol{Z}} \delta_{2n\pi/\omega}, \varphi \right\rangle$$

も成り立つことがわかる．よって定理が証明された． □

(例 7 終わり) □

ポアソンの総和公式から情報理論で重要なサンプリング定理が得られる．これについては，5.3 節で述べる．

▶ **例 8 (ヘヴィサイド関数のフーリエ変換)** H をヘヴィサイド関数とする．このとき，

$$\mathcal{F}[H] = \pi\delta - i\,\text{p.v.}\,\frac{1}{x}$$

となる．まず，次の補題を準備しておく．

補題 4.10 任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対し，ある $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ $(j=1,2,\dots)$ を，すべての $N \in \mathbf{Z}_+$ に対して，次が成り立つようにとることができる:

$$|\varphi_j - \varphi|_N \to 0 \quad (j\to\infty) \quad \text{かつ} \quad \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset \operatorname{supp}(\varphi) \quad (j=1,2,\dots).$$

証明 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ を $0 \leqq \phi \leqq 1$, $\phi(x) = 1$ $(|x| < 1)$, $\phi(x) = 0$ $(|x| > 2)$ なる関数とする．$j = 1, 2, \ldots$ に対して $\phi_j(x) = \phi\left(\dfrac{x}{j}\right)$ とおき，$\varphi_j(x) = \phi_j(x)\varphi(x)$ とおく．明らかに，$\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ である．また，

$$\varphi(x) - \varphi_j(x) = (1 - \phi_j(x)) \cdot \varphi(x)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(\varphi - \varphi_j)(x) &= \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta(1 - \phi_j(x)) \cdot \partial^{\alpha-\beta}\varphi(x) \\ &= (1 - \phi_j(x))\partial^\alpha\varphi(x) - \sum_{\substack{\beta \leqq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \phi_j(x) \partial^{\alpha-\beta}\varphi(x) \\ &= (1 - \phi_j(x))\partial^\alpha\varphi(x) - \sum_{\substack{\beta \leqq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \frac{1}{j^{|\beta|}} \partial^\beta \phi\left(\frac{x}{j}\right) \partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}(1 + |x|)^k |\partial^\alpha(\varphi - \varphi_j)(x)| &\leqq (1 - \phi_j(x))(1 + |x|)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| \\ &\quad + \frac{1}{j} \sum_{\substack{\beta \leqq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta \phi\|_\infty (1 + |x|)^k |\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)|.\end{aligned}$$

ここで

$$(1 + |x|)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| \leqq |\varphi|_{|\alpha|+k+1} (1 + |x|)^{-1}$$

であるから，$|x| < j$ のとき $1 - \phi_j(x) = 0$ より，$x \in \mathbf{R}^d$ に対して

$$(1 - \phi_j(x))(1 + |x|)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| \leqq \frac{1}{1 + j} |\varphi|_{|\alpha|+k+1}$$

を得る．ゆえに，j に依存しない定数 $C\,(> 0)$ が存在し，

$$(1 + |x|)^k |\partial^\alpha(\varphi - \varphi_j)(x)| \leqq \frac{1}{1 + j} |\varphi|_{|\alpha|+k+1} + \frac{1}{j} C \left(\sum_{\beta \leqq \alpha} \|\partial^\beta \phi\|_\infty \right) \cdot |\varphi|_{|\alpha|+k}.$$

よって，j に依存しない正定数 C' が存在し，

$$|\varphi - \varphi_j|_N \leqq C' j^{-1} |\varphi|_{N+1} \qquad (j \to \infty)$$

が成り立つ．∎

例 8 の証明 任意に $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ をとり，$\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-a, a]$ なる $a > 0$ をとる．このとき，

$$\langle \mathcal{F}[H], \varphi \rangle = \langle H, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \mathcal{F}[\varphi](\xi)\, d\xi.$$

ここで

$$\int_0^R \mathcal{F}[\varphi](\xi)\,d\xi = \int_0^R \left(\int_{-a}^a \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx\right) d\xi = \int_{-a}^a \left(\int_0^R e^{-ix\cdot\xi} d\xi\right) \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^a i\frac{e^{-iRx}-1}{x}\varphi(x)\,dx$$

$$= i\int_{-a}^a e^{-iRx}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - i\int_{-a}^a \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$$

$$+ i\varphi(0)\int_{-a}^a \frac{e^{-iRx}-1}{x}\,dx. \qquad (=: I_{1,R} - I_2 + I_{3,R} \text{ とおく})$$

さて，$\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ とおくと，$\psi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$ であるから，

$$-I_{1,R} = -i\int_{-a}^a e^{-iRx}\psi(x)\,dx = i\int_{-a}^a \left(\frac{1}{iR}e^{-iRx}\right)'\psi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{R}(e^{-iaR}\psi(a) - e^{iaR}\psi(-a)) - \frac{1}{R}\int_{-a}^a e^{-iRx}\psi'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{R}(e^{-iaR}\psi(a) - e^{iaR}\psi(-a)) - \frac{1}{R}\int_{-a}^a e^{-iRx}\left(\int_0^1 t\varphi''(tx)\,dt\right)dx.$$

ゆえに

$$|I_{1,R}| \leqq \frac{1}{R}(2|\varphi|_1 + a|\varphi|_2) \to 0 \qquad (R\to\infty).$$

一方，

$$I_2 = i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<a}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = i\left\langle \text{p.v.}\,\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle,$$

$$I_{3,R} = i\varphi(0)\int_{-a}^a \frac{\cos Rx - 1}{x}\,dx + \varphi(0)\int_{-a}^a \frac{\sin Rx}{x}\,dx$$

$$= \varphi(0)\int_{-aR}^{aR}\frac{\sin x}{x}\,dx \to \pi\varphi(0) \qquad (R\to\infty).$$

以上の計算から，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ のときは，

$$\langle \mathcal{F}[H], \varphi\rangle = \langle \pi\delta, \varphi\rangle - i\left\langle \text{p.v.}\,\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle. \qquad (*)$$

ここで補題 4.10 を使えば，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対しても $(*)$ が成り立つことがわかる． □

(例 8 終わり) □

▶**例 9 (ヒルベルト変換のフーリエ変換)** $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ とコーシーの主値 $\dfrac{1}{\pi}\mathrm{p.v}\dfrac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ との合成積

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x} * f \qquad (\in \mathcal{S}'(\mathbf{R}))$$

を f の**ヒルベルト変換**という．ヒルベルト変換は調和解析学，複素関数論，線形システムなどで重要な役割を果たす．ここでは，ヒルベルト変換のフーリエ変換を求めておく．

まずヘヴィサイド関数 $H(x)$ を使って，次の関数を定義しておく:

$$\mathrm{sgn}\, x = H(x) - H(-x) = H(x) - H^{\vee}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

例 8 より

$$\mathcal{F}^{-1}[H] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[H]^{\vee} = \frac{1}{2}\delta + \frac{i}{2\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x},$$

$$\mathcal{F}^{-1}[H^{\vee}] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[H] = \frac{1}{2}\delta - \frac{i}{2\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}.$$

ゆえに

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{sgn}\,\xi] = \mathcal{F}^{-1}[H - H^{\vee}] = \frac{i}{\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}.$$

これをフーリエ変換すれば，

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right] = -i\,\mathrm{sgn}\,\xi.$$

よって

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}f] = (-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)\widehat{f}(\xi) \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})) \tag{4.11}$$

が得られる． □

定理 3.24 のひとつの応用として，ヒルベルト変換が L^2 ノルムを保存することを証明する．

定理 4.11 $\mathcal{H}$ をヒルベルト変換とする．このとき次が成り立つ:

$$\|\mathcal{H}f\|_2 = \|f\|_2 \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})).$$

証明 $\|\mathcal{H}f\|_2 = (2\pi)^{-1/2}\|\mathcal{F}[\mathcal{H}f]\|_2 = (2\pi)^{-1/2}\|(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)\mathcal{F}[f]\|_2$
$= (2\pi)^{-1/2}\|\mathcal{F}[f]\|_2 = \|f\|_2.$ □

5 章

緩増加超関数の合成積 — 詳論 —

緩増加超関数の合成積は，フーリエ解析をはじめ，解析学のさまざまな局面で重要な役割をはたすので少し詳しく述べておこう．

5.1 合成積のもう一つの定義について

合成積は次のように表すこともできる． $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int f(y)(g^{\vee}) \circ \tau_x(y)\,dy.$$

そこで， $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対する合成積の別の定義として

$$F *_1 \varphi(x) = \langle F, (\varphi^{\vee}) \circ \tau_x \rangle \qquad (x \in \mathbf{R}^d)$$

も考えられる．以下では $F * \varphi$ と $F *_1 \varphi$ が同一のものとみなせることを次の手順で証明していく．

(1) $F *_1 \varphi$ は緩増加関数である．したがって $F *_1 \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

(2) $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ の意味で $F * \varphi = F *_1 \varphi$，すなわち，

$$\langle F * \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} F *_1 \varphi(x)\psi(x)\,dx \qquad (\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)).$$

まず，次の命題から証明する．

命題 5.1 F を $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ から $\mathbf{C}$ への線形写像，すなわち定義 4.1 (i) を満たすものとする．このとき次の (i), (ii) は同値である:

(i) $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

(ii) ある自然数 N とある正数 C が存在し，すべての $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，次が成り立つ:

$$|\langle F, \varphi \rangle| \leqq C|\varphi|_N.$$

証明 (ii) $\Longrightarrow$ (i) は明らかであるから，(i) $\Longrightarrow$ (ii) を証明する．

$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ とする．(ii) が成立しないとして矛盾を導く．(ii) が不成立のとき，任意の自然数 N に対して，ある $\varphi_N \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ が存在し，

$$|\langle F, \varphi_N \rangle| > N|\varphi_N|_N \tag{5.1}$$

が成り立つ．$\psi_N = \varphi_N/(N|\varphi_N|_N)$ とおくと，すべての $k \leqq N$ に対して，

$$|\psi_N|_k \leqq |\psi_N|_N = \frac{1}{N}$$

である．したがって，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して，$N \to \infty$ のとき $|\psi_N|_k \to 0$ となる．ゆえに，$\psi_N \to 0$ in $\mathcal{S}$ である．したがって，

$$\langle F, \psi_N \rangle \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

ところが (5.1) より，次のようになってしまう:

$$|\langle F, \psi_N \rangle| = \frac{1}{N|\varphi_N|_N} |\langle F, \varphi_N \rangle| > 1.$$

□

これを使って次のことを示す．

命題 5.2　$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき，次の (1), (2) が成り立つ:

(1) $F *_1 \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ で，$\partial^\alpha(F *_1 \varphi) = F *_1 \partial^\alpha \varphi$.

(2) $F *_1 \varphi$ は緩増加関数である．

証明　(1) $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{R}^d$ とする．このとき，

$$\frac{1}{h}[(\varphi^\vee) \circ \tau_{x+he_j} - (\varphi^\vee) \circ \tau_x] \longrightarrow ((\partial_j \varphi)^\vee) \circ \tau_x \quad \text{in } \mathcal{S} \tag{5.2}$$

を示す．3.2 節のテイラーの公式より

$$\begin{aligned}
&(1+|x|)^\ell \left| \frac{1}{h}[\partial^\alpha \varphi(x + he_j - y) - \partial^\alpha \varphi(x - y)] - \partial_j \partial^\alpha \varphi(x - y) \right| \\
&= (1 + |x|)^\ell \left| h \int_0^1 (1 - t) \partial_j^2 \partial^\alpha \varphi(x + the_j - y)\, dt \right| \\
&\leqq \frac{1}{2} h |\varphi|_{|\alpha|+2+\ell} \to 0 \qquad (h \to 0).
\end{aligned}$$

これより，(5.2) がわかる．したがって，$\partial_j(F *_1 \varphi)$ が存在し，

$$\partial_j F *_1 \varphi(x) = F *_1 \partial_j \varphi(x)$$

である．この議論を繰り返せば，$F *_1 \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ で $\partial^\alpha(F *_1 \varphi) = F *_1 \partial^\alpha \varphi$ がわかる．

(2) 命題 5.1 (ii) より，ある $N \in \mathbf{N}$ と $C > 0$ が存在し，

$$|F *_1 \varphi(x)| = |\langle F, (\varphi^\vee) \circ \tau_x \rangle| \leqq C|(\varphi^\vee) \circ \tau_x|_N \qquad (x \in \mathbf{R}^d)$$

である．ここで

$$|(\varphi^\vee)\circ\tau_x|_N=\sum_{|\alpha|+k\leqq N}\sup_{y\in\mathbf{R}^d}(1+|y|)^k|\partial^\alpha\varphi(x-y)|.$$

(3.15) より，$(1+|y|)^k\leqq(1+|x|)^k(1+|x-y|)^k$ であるから，

$$\begin{aligned}|(\varphi^\vee)\circ\tau_x|_N&\leqq(1+|x|)^N\sum_{|\alpha|+k\leqq N}\sup_{y\in\mathbf{R}^d}(1+|x-y|)^k|\partial^\alpha\varphi(x-y)|\\&=(1+|x|)^N|\varphi|_N.\end{aligned}$$

ゆえに，$|F*_1\varphi(x)|\leqq C(1+|x|)^N|\varphi|_N$ である．このことと命題 5.2(1) を用いれば，(2) が証明される．□

命題 5.3　F と φ を命題 5.2 と同じものとする．このとき次が成り立つ:

$$F*\varphi=F*_1\varphi.$$

証明　まず，$\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ の場合に $\langle F*\varphi,\psi\rangle=\langle F*_1\varphi,\psi\rangle$ を証明する．

$$f_j(x)=\frac{1}{2^{jd}}\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\varphi^\vee\left(x-\frac{k}{2^j}\right)\psi\left(\frac{k}{2^j}\right)$$

とおくと，右辺の和は $\mathrm{supp}(\psi)$ が有界集合であるから，実際は有限和であることに注意する．$f_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ である．$\mathrm{supp}(\varphi),\mathrm{supp}(\psi)\subset B(0,R)$ なる半径 R の開球をとると $\mathrm{supp}(\varphi^\vee*\psi)\subset B(0,2R)$ となっていることが容易に示せる．$\langle F,\varphi^\vee\circ\tau_x\rangle\,\psi(x)$ はコンパクトな台をもつ．連続関数である．したがって

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\langle F,f_j\rangle&=\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\left\langle F,\varphi^\vee\circ\tau_{k/2^j}\right\rangle\psi\left(\frac{k}{2^j}\right)\frac{1}{2^{jd}}\\&=\int_{\mathbf{R}^d}\left\langle F,\varphi^\vee\circ\tau_x\right\rangle\psi(x)\,dx\\&=\langle F*_1\varphi,\psi\rangle\end{aligned}$$

が成り立っている．

次に，$f_j\to\varphi^\vee*\psi$ in $\mathcal{S}$ $(j\to\infty)$ を示す．これが示せれば

$$\lim_{j\to\infty}\langle F,f_j\rangle=\left\langle F,\varphi^\vee*\psi\right\rangle=\langle F*\varphi,\psi\rangle$$

が得られ，命題が $\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ の場合に示せたことになる．$\mathrm{supp}(f_j),\mathrm{supp}(\varphi^\vee*\psi)\subset B(0,2R)$ より，任意の $\alpha\in\mathbf{Z}_+^d$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^d}\left|\partial^\alpha f_j(x)-\partial^\alpha\varphi^\vee*\psi(x)\right|\to 0\qquad(j\to\infty)$$

を示せば十分である．$k=(k_1,\cdots,k_d)\in\mathbf{Z}^d$ と，$j\in\mathbf{Z}_+$ に対して

$$Q_{j,k}=\left[\frac{k_1}{2^j},\frac{k_1+1}{2^j}\right)\times\cdots\times\left[\frac{k_d}{2^j},\frac{k_d+1}{2^j}\right)$$

とする．このとき各 j に対して，$\Lambda_j = \left\{k \in \mathbf{Z}^d : Q_{j,k} \cap B(0,2R) \neq \emptyset\right\}$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\left|\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha \varphi^\vee * \psi(x)\right| \\
&\quad = \left|\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha \varphi^\vee * \psi(x)\right| \chi_{B(0,2R)}(x) \\
&\quad = \left|\frac{1}{2^{jd}} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \partial^\alpha \varphi^\vee \left(x - \frac{k}{2^j}\right) \psi\left(\frac{k}{2^j}\right) - \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_{Q_{j,k}} \partial^\alpha \varphi^\vee (x-y)\, \psi(y)\, dy\right| \\
&\qquad \times \chi_{B(0,2R)}(x) \\
&\quad = \left|\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_{Q_{j,k}} \left(\partial^\alpha \varphi^\vee \left(x - \frac{k}{2^j}\right) \psi\left(\frac{k}{2^j}\right) - \partial^\alpha \varphi^\vee (x-y)\, \psi(y)\right) dy\right| \\
&\qquad \times \chi_{B(0,2R)}(x) \\
&\quad \leqq \sum_{k \in \Lambda_j} \int_{Q_{j,k}} \left|\partial^\alpha \varphi^\vee \left(x - \frac{k}{2^j}\right) \psi\left(\frac{k}{2^j}\right) - \partial^\alpha \varphi^\vee (x-y)\, \psi(y)\right| dy.
\end{aligned}
$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな j をとれば，任意の $x \in \mathbf{R}^d$ と任意の $y \in Q_{j,k}$ に対して

$$
\left|\partial^\alpha \varphi^\vee \left(x - \frac{k}{2^j}\right) \psi\left(\frac{k}{2^j}\right) - \partial^\alpha \varphi^\vee (x-y)\, \psi(y)\right| < \varepsilon
$$

とできる．したがって

$$
\left|\partial^\alpha f_j(x) - \partial^\alpha \varphi^\vee * \psi(x)\right| \leqq C_R \varepsilon,
$$

ここで C_R は R にのみ依存した正定数である．ゆえに $f_j \to \varphi^\vee * \psi$ in $\mathcal{S}$ $(j \to \infty)$ であることが示せた．

次に $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ の場合に $\langle F * \varphi, \psi \rangle = \langle F *_1 \varphi, \psi \rangle$ を証明する．$\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ をとる．このとき，

$$
\langle F * \varphi_n, \psi \rangle = \left\langle F, \varphi_n^\vee * \psi \right\rangle \to \left\langle F, \varphi^\vee * \psi \right\rangle = \langle F * \varphi, \psi \rangle
$$

である．また命題 5.1 より，ある正数 C とある自然数 N が存在し，$|\langle F, \varphi_n^\vee \circ \tau_x \rangle| \leqq C\, |\varphi_n|_N$ であるが，$|\varphi_n - \varphi|_N$ は収束数列であるから，$|\varphi_n|_N$ は有界数列である．したがって，ある正数 C' が存在し，$|\langle F, \varphi_n^\vee \circ \tau_x \rangle\, \psi(x)| \leqq C'\, |\psi(x)|$ が成り立つ．ゆえに，ルベーグの収束定理より

$$
\begin{aligned}
\langle F *_1 \varphi_n, \psi \rangle &= \int_{\mathbf{R}^d} \left\langle F, \varphi_n^\vee \circ \tau_x \right\rangle \psi(x)\, dx \\
&\to \int_{\mathbf{R}^d} \left\langle F, \varphi^\vee \circ \tau_x \right\rangle \psi(x)\, dx = \langle F *_1 \varphi, \psi \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つ．最後に $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ の場合は，$\psi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\psi_n \to \psi$ in $\mathcal{S}$ なる近似列をとり，φ, ψ_n に対して $\langle F * \varphi, \psi_n \rangle = \langle F *_1 \varphi, \psi_n \rangle$ が成立しているので，あとは極限をとれば求める場合が得られる． □

5.2 超関数と超関数の合成積

はじめに，緩増加超関数に対して台の概念を導入しよう．$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ とする．$\mathbf{R}^d$ の開集合 Ω に対して，

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d), \quad \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega \implies \langle F, \varphi \rangle = 0$$

が成り立つとき，F は Ω 上で $\mathbf{0}$ であるという．

$$Z(F) = \bigcup \{\Omega : \Omega \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ の開集合で，} F \text{ は } \Omega \text{ 上で } 0\}$$

とおき，F の台を

$$\mathrm{supp}(F) = \mathbf{R}^d \setminus Z(F) \quad (= \mathbf{R}^d \cap Z(F)^c)$$

により定義する．

このとき，$Z(F)$ は F が 0 になる最大の開集合であることを容易に示すことができる．このことを証明しておく．

$$\mathcal{U} = \left\{\Omega : \Omega \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ の開集合で，} F \text{ は } \Omega \text{ 上で } 0\right\}$$

とおく．定義より $Z(F)$ は開集合であり，$\mathcal{U}$ はその開被覆になっている．このとき，$\mathcal{U}$ に関する 1 の分解[1)]より，次の (i)–(iv) を満たす $f_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が存在する:

(i) 各 k に対して，$0 \leqq f_k(x) \leqq 1$ $(x \in Z(F))$,

(ii) 各 k に対して，$\mathrm{supp}(f_k)$ はある $\Omega \in \mathcal{U}$ に属す,

(iii) 任意の $x \in Z(F)$ に対して，x のある開近傍 $V(x)$ が存在し，$\mathrm{supp}(f_k) \cap V(x) \neq \emptyset$ なる k は高々有限個しか存在しない,

(iv) 任意の $x \in Z(F)$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1,2,\cdots} f_k(x) = 1$.

示すべきことは，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset Z(F)$ に対して $\langle F, \varphi \rangle = 0$ であるが，補題 4.10 より $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset Z(F)$ の場合を考えれば十分である．このとき

$$\varphi(x) = \sum_{k=1,2,\cdots} f_k(x)\varphi(x)$$

であるが，$\mathrm{supp}(\varphi)$ のコンパクト性と条件 (iii) より，右辺の和は実際は有限和

---

1) たとえば，[杉浦] 第 VII 章 2 節参照.

にできる．したがって，

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{k=1,2,\cdots} \langle F, f_k(x)\varphi(x) \rangle = 0$$

となる．以上のことから，$Z(F)$ は F が 0 となるような最大の開集合であることがわかる．

本節では，主に $\mathrm{supp}(F)$ がコンパクト集合であるような緩増加超関数について述べる．

$$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d) = \{F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \ : \ \mathrm{supp}(F) \text{ はコンパクト } \}$$

とおく．

ここで，コンパクトな台をもつ超関数のもつ著しい性質として，$F \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ のとき，$\mathcal{F}[F]$ が $\mathbf{R}^d$ 上の緩増加関数とみなせることを示す．

$F \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ とし，$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ を $\mathrm{supp}(F)$ のある近傍で $\varphi = \psi = 1$ となるものとする．$E_\xi(x) = e^{-ix\cdot\xi}$ とすると，

$$\langle F, \psi E_\xi \rangle = \langle F, \varphi E_\xi \rangle \qquad (\xi \in \mathbf{R}^d)$$

が成り立つ．なぜならば，$(\psi - \varphi)E_\xi$ は $\mathrm{supp}(F)$ のある近傍で 0 となるからである．そこで，このような ψ を一つとり

$$\widehat{F}(\xi) = \langle F, \psi E_\xi \rangle \qquad (\xi \in \mathbf{R}^d)$$

とおく．このとき，この $\widehat{F}$ を F の**フーリエ・ラプラス変換**とよぶ．

命題 5.4 $F \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ のとき，$\widehat{F}$ は緩増加関数になっている．

証明 命題 5.2 (1) の証明と同様にして，

$$\partial_j \widehat{F}(\xi) = \langle F, \partial_j(\psi E_\xi) \rangle$$

が証明できる．また，∂_j は ξ_j の微分なので $\partial_j \psi = 0$ になるので

$$\begin{aligned}\langle F, \partial_j(\psi E_\xi) \rangle &= \langle F, (\partial_j \psi) E_\xi \rangle + \langle F, \psi(\partial_j E_\xi) \rangle \\ &= -i\langle F, \psi x_j E_\xi \rangle \qquad (\because\ \partial_j E_\xi(x) = -ix_j E_\xi(x)).\end{aligned}$$

この議論を繰り返せば

$$\partial^\alpha \widehat{F}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \langle F, \psi x^\alpha E_\xi \rangle$$

を得る．したがって命題 5.1 (ii) より，ある $N \in \mathbf{N}$ と $c > 0$ が存在し，

$$|\partial^\alpha \widehat{F}(\xi)| \leqq c\,|\,\psi x^\alpha E_\xi|_N.$$

ここで，$\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ より容易に

$$|\psi x^\alpha E_\xi|_N \leqq c'(1+|\xi|)^N \qquad (c' \text{ は } \xi \text{ によらない定数})$$

が示せるので，次が得られる：

$$|\partial^\alpha \widehat{F}(\xi)| \leqq c''(1+|\xi|)^N \qquad (c'' \text{ は } \xi \text{ によらない定数}). \qquad \square$$

すでに $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ との合成積 $F * \varphi$ を定義したが，ここでは，$F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と $G \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ との超関数どうしの合成積を定義する．そのための準備をしておきたい[2)]．

補題 5.5 $F \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ とする．このとき次の (1)–(3) が成り立つ:

(1) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ならば $\widehat{F}\varphi,\ F * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

(2) $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ ならば $\widehat{F}\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$.

(3) $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ ならば $F * \varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$.

証明 (1) $\ell \in \mathbf{Z}_+,\ \alpha \in (\mathbf{Z}_+)^d$ に対して，

$$(1+|\xi|)^\ell |\partial^\alpha(\widehat{F}\varphi)(\xi)| \leqq (1+|\xi|)^\ell \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^\beta \widehat{F}(\xi) \partial^{\alpha-\beta}\varphi(\xi)\right|. \tag{5.3}$$

仮定より

$$|\partial^\beta \widehat{F}(\xi)| \leqq C_\beta (1+|\xi|)^{M_\beta} \qquad (\xi \in \mathbf{R}^d)$$

を満たす $C_\beta > 0$ と $M_\beta \in \mathbf{N}$ が存在する．ここで，$M_\alpha = \max_{\beta \leqq \alpha} M_\beta,\ C_\alpha = \max_{\beta \leqq \alpha} C_\beta$ とすると，

$$\begin{aligned}(5.3) \text{ の右辺} &\leqq C_\alpha (1+|\xi|)^{\ell+M_\alpha} \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta}\varphi(\xi)| \\ &\leqq C_\alpha \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\varphi|_{|\alpha|+\ell+M_\alpha}.\end{aligned}$$

したがって，任意の $N \in \mathbf{N}$ に対して，N と F にのみ依存した定数 $C > 0,\ M \in \mathbf{N}$ が存在し

$$|\widehat{F}\varphi|_N \leqq C|\varphi|_{N+M} \tag{5.4}$$

となる．このことから，$\widehat{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ がわかる．さらに，$F = F\psi$ ($\widehat{F}$ の定義参照) と命題 5.3 の証明と同様の方法により $\mathcal{F}[F] = \widehat{F}$ が得られ，

$$F * \varphi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[F * \varphi] = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{F}\widehat{\varphi}] \tag{5.5}$$

---

2) $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ より広いクラスの超関数に対しても合成積が定義できる ([垣田] 参照).

となる．したがって，$F*\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である．

(2) (5.4) より明らか．

(3) (2) および (5.5) より明らか． □

以上の準備のもとに $F\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と $G\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ の合成積の定義をする．

さて，$G^\vee\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ であるから，補題 5.5 より $(G^\vee)*\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である．また，$\varphi_j\to 0$ in $\mathcal{S}$ ならば $(G^\vee)*\varphi_j\to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ となっている．そこで次のような定義をする．

定義 5.1 $F\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d), G\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\langle F*G,\varphi\rangle=\langle F,(G^\vee)*\varphi\rangle\qquad(\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

によって $F*G$ を定義する．また $G*F=F*G$ とする．

上の考察から $F*G\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ になっている．さらに次が成り立つ．

定理 5.6 $F\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d), G\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^d)$ とすると，

$$\mathcal{F}[F*G]=\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G]$$

が成り立つ．

証明 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}[F*G],\varphi\rangle&=\langle F*G,\mathcal{F}[\varphi]\rangle=\langle F,(G^\vee)*\mathcal{F}[\varphi]\rangle\\&=\langle\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[F],(G^\vee)*\mathcal{F}[\varphi]\rangle=\langle\mathcal{F}[F],\mathcal{F}^{-1}[(G^\vee)*\mathcal{F}[\varphi]]\rangle.\end{aligned}$$

さて，

$$\mathcal{F}^{-1}[(G^\vee)*\widehat{\varphi}]=(2\pi)^d\mathcal{F}^{-1}[G^\vee]\varphi=(2\pi)^d(\mathcal{F}^{-1}[G])^\vee\varphi=\mathcal{F}[G]\varphi.$$

ゆえに，$\langle\mathcal{F}[F*G],\varphi\rangle=\langle\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G],\varphi\rangle$ である． □

5.3 シャノンのサンプリング定理

$f\in L^2(\mathbf{R})$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ がある有限区間 $[-\ell,\ell]$ の外側のほとんどすべての点で 0，すなわち

$$\mathcal{F}[f](\xi)=0\quad\text{a.e. }\xi\notin[-\ell,\ell]$$

を満たすとき，f を**帯域制限関数**という．$\mathcal{F}[f](\xi)$ は，f を構成する角周波数 ξ の関数 $e^{i\xi x}$ がどのくらい含まれているかを表す量であったので，帯域制限関

数は，$|\xi| > \ell$ なる角周波数成分を含まない関数ということになる．

このような帯域制限関数 $f(x)$ が与えられたとき，じつはある一定の間隔で f の値をサンプルとしてとっておけば，そのデータから f が完全に復元することができる．いわゆる**シャノンのサンプリング定理**[3)]である．本節ではこの定理を証明する．

次の定理の証明からはじめる．

定理 5.7 $T > 0$ とする．$f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ を $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$ を満たすものとする．このとき，f は緩増加関数で，次を満たす:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)E_{nT} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_{2n\pi/T}\mathcal{F}[f] \quad \text{in } \mathcal{S}'. \tag{5.6}$$

証明 仮定より，f は緩増加関数であることがわかる．$\Theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nT}$ (ディラックの櫛) とする．$f\Theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta_{nT}$ であり，$f\Theta \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ である．フーリエ変換により

$$\mathcal{F}[f\Theta] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)E_{nT}$$

である．一方，ポアソンの総和公式より，

$$\mathcal{F}[f\Theta] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[\Theta] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f] * \delta_{2n\pi/T}.$$

ここで，$\mathcal{F}[f] * \delta_{2n\pi/T} = \tau_{2n\pi/T}\mathcal{F}[f]$ であるから，定理が証明された． □

この定理を，特に $\mathrm{supp}(\mathcal{F}[f]) \subset [-\pi/T, \pi/T]$ なる $f \in L^2(\mathbf{R})$ に適用すると，次の定理が得られる．$T > 0$ に対して，関数 h_T を次のように定義する:

$$h_T(x) = \frac{\sin(\pi x/T)}{(\pi x/T)}.$$

定理 5.8 (シャノンのサンプリング定理) $T > 0$ とする．$f \in L^2(\mathbf{R})$ を連続かつ $\mathrm{supp}(\mathcal{F}[f]) \subset [-\pi/T, \pi/T]$ を満たすものとする．このとき，

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f(nT)h_T(x - nT) \tag{5.7}$$

が成り立つ．ただし，右辺の和の収束は $L^2(\mathbf{R})$ ノルム収束，かつ $\mathbf{R}$ 上の一様

[3)] シャノン・ホイッタカー (Whittaker)・染谷の定理ともいわれている．本書での証明は本質的に [Mal] による．

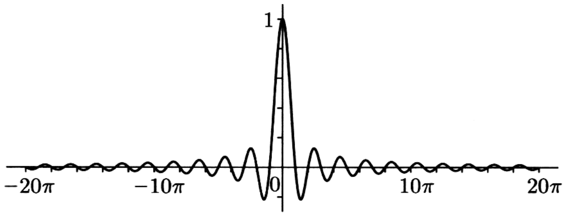


図 5.1 $\dfrac{\sin x}{x}$

収束である.

定理 5.8 において, T を**サンプリング周期**という.

証明 はじめに本定理の f に対して, (5.6) の左辺が $[-\pi/T, \pi/T]$ 上で L^2 ノルム収束していることを証明する. パーセヴァルの等式より

$$\frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2\,d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(\mathcal{F}[f])|^2,$$

ただし, $c_n(\mathcal{F}[f])$ は $[-\pi/T, \pi/T]$ 上の $\mathcal{F}[f]$ のフーリエ係数である. ゆえに

$$\begin{aligned}
c_n(\mathcal{F}[f]) &= \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \mathcal{F}[f](\xi)e^{-inT\xi}\,d\xi \\
&= \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\xi)e^{-inT\xi}\,d\xi \\
&= T\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f](-nT) = Tf(-nT).
\end{aligned}$$

これより

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(nT)|^2 < \infty \tag{5.8}$$

が得られる. ゆえに (5.6) の左辺は $[-\pi/T, \pi/T]$ 上では L^2 ノルム収束している. ところで, $\tau_{2n\pi/T}\mathcal{F}[f]$ は $\mathbf{R}$ 上の L^2 関数であり, しかも $\mathrm{supp}(\mathcal{F}[f])$ と $\mathrm{supp}(\tau_{2n\pi/T}\mathcal{F}[f])$ は, $|n| \geqq 2$ のときは互いに素で, $|n| = 1$ のときには高々一点を共有するだけなので, 緩増加超関数として $\tau_{2n\pi/T}\mathcal{F}[f]\chi_{[-\pi/T,\pi/T]} = 0$ である. ゆえに次の等式が成り立つ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)E_{nT}\chi_{[-\pi/T,\pi/T]} = \frac{1}{T}\mathcal{F}[f], \tag{5.9}$$

ただし, 左辺は $\chi_{[-\pi/T,\pi/T]}$ をかけてあるので, $L^2(\mathbf{R})$ ノルム収束している.

(5.9) の両辺を逆フーリエ変換すると,

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{n=-N}^{N} f(nT)\,E_{nT}\chi_{[-\pi/T,\pi/T]}\right] = \frac{1}{T}f \tag{5.10}$$

が $L^2(\boldsymbol{R})$ ノルム収束の意味で成り立っていることがわかる.

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{[-\pi/T,\pi/T]}\right](x)=\frac{1}{T}h_T(x) \tag{5.11}$$

および $h_T\in L^2(\boldsymbol{R})$ に注意しておく．この (5.11) と定理 5.6 より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{[-\pi/T,\pi/T]}\sum_{n=-N}^{N}f(nT)\,E_{nT}\right]&=\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{T}h_T\right]\mathcal{F}\left[\sum_{n=-N}^{N}f(nT)\,\delta_{nT}\right]\right]\\&=\frac{1}{T}h_T*\sum_{n=-N}^{N}f(nT)\,\delta_{nT}\end{aligned}$$

となっている．ここで $h_T*\delta_{nT}=h_T(\cdot-nT)$ とみなせる．なぜならば，任意の $\varphi\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ に対して

$$\delta_{nT}^{\vee}*_1\varphi(x)=\left\langle\delta_{nT}^{\vee},\left(\varphi^{\vee}\circ\tau_x\right)\right\rangle=\varphi(x+nT)$$

であり，したがって

$$\begin{aligned}\langle h_T*\delta_{nT},\varphi\rangle=\left\langle h_T,\delta_{nT}^{\vee}*\varphi\right\rangle&=\int_{\boldsymbol{R}}h_T(x)\,\varphi(x+nT)\,dx\\&=\int_{\boldsymbol{R}}h_T(x-nT)\,\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

が得られるからである．ゆえに

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{[-\pi/T,\pi/T]}\sum_{n=-N}^{N}f(nT)\,E_{nT}\right]=\frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N}f(nT)\,h_T(\cdot-nT)$$

であるから，(5.10) とあわせて (5.7) が $L^2(\boldsymbol{R})$ ノルム収束の意味で成り立つことがわかる．

次に，この収束が $\mathbf{R}$ 上の一様収束であることを証明する．

$$\varepsilon_N=f-\sum_{n=-N}^{N}f(nT)h_T(x-nT)$$

とおく．このとき

$$\mathcal{F}[\varepsilon_N]=\widehat{f}-\sum_{n=-N}^{N}f(nT)TE_{nT}\chi_{[-\pi/T,\pi/T]}$$

であるから，

$$\mathrm{supp}(\mathcal{F}[\varepsilon_N])\subset[-\pi/T,\pi/T]$$

である．ゆえに $x\in\mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}|\varepsilon_N(x)|=|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\varepsilon_N](x)|&\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}|\mathcal{F}[\varepsilon_N(\xi)]|\,d\xi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}|\mathcal{F}[\varepsilon_N](\xi)|\,d\xi\end{aligned}$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi/T}^{\pi/T} d\xi\right)^{1/2} \|\mathcal{F}[\varepsilon_N]\|_2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{T}}\|\varepsilon_N\|_2 \to 0 \qquad (N \to \infty). \qquad \square$$

ところで，$\mathcal{F}[f]$ が $[-\pi/T, \pi/T]$ の外側に角周波数 ξ (をもつような関数 $e^{i\xi t}$) を含んでいる場合，すなわち $\mathrm{supp}(\mathcal{F}[f]) \not\subset [-\pi/T, \pi/T]$ の場合，サンプリング周期 T でとったデータから f が復元できるだろうか．この場合，定理 5.6 より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)E_{nT}\mathcal{F}[h_T] = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\cdot - 2n\pi/T)\chi_{[-\pi/T,\pi/T]} \tag{5.12}$$

となっている．ところが，右辺において $\mathcal{F}[f](\cdot - 2n\pi/T)$ $(n \neq 0)$ が 0 になっていないことがある．したがって $[-\pi/T, \pi/T]$ 上で $\mathcal{F}[f](\cdot - 2n\pi/T)$ からの折り返しによる歪みが生まれ，$[-\pi/T, \pi/T]$ 上で (5.12) の右辺は $\mathcal{F}[f]$ とは違った形状のグラフをもつ．したがって，サンプリング定理は成り立たなくってしまう．このような現象を**エイリアシング**という．

そこで，f を $\mathrm{supp}(\mathcal{F}[g]) \subset [-\pi/T, \pi/T]$ なる関数 g によってある程度近似できないだろうかという問題が生ずる．このような g で f をもっとも良く L^2 近似しているものを見いだしてみよう．

次の等式は明らかである:

$$2\pi\|f-g\|_2^2 = \int_{|\xi|>\pi/T} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2\, d\xi + \int_{|\xi|\leqq\pi/T} |\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[g]|^2\, d\xi.$$

したがって，$\|f-g\|_2$ を最小にする関数は $\mathcal{F}[g] = T^{-1}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[h_T]$ であることがわかる．すなわち

$$g = \frac{1}{T} f * h_T$$

が求める関数である．

Part II

一般化フーリエ級数と直交関数系

Fourier は関数を記述する関数系として三角関数系 $\{\sin k\pi x, \cos k\pi x\}$ (あるいは $\{e^{ikx}\}$) があることを発見した．しかし，関数を記述できる関数系はこれだけではない．たとえば，

関数	関数系
$[-1,1]$ 上の関数	ルジャンドル多項式系
$(-\infty,\infty)$ 上の関数	エルミート関数系
$(0,+\infty)$ 上の関数	ラゲール関数系
球面上の関数	球面調和関数系
$(-\infty,\infty)$ 上の関数	ウェーブレット関数系
⋮	⋮

など，さまざまなものが現在まで発見されている．すでに述べたような熱方程式や電気回路の方程式の研究には $\{e^{ikx}\}$ が適している．しかし，別の方程式や別の目的のためには，必ずしも $\{e^{ikx}\}$ が最適とは限らない．目的に応じていろいろな関数系を探したりあるいは自分でつくったりしなければならない．ここでは，そのような関数系をつくるときの助けとなる定理や，上に述べた多項式系あるいは関数系がどういうものなのかを学んでいく．

6 章

一般化フーリエ級数

6.1 フーリエ級数と線形代数

本節では，何か新しい関数系を考えて，これが関数を記述できるかどうかを調べる統一的な方法を述べる．そのためにまず，フーリエ級数の理論が線形代数と類似した部分をかなりもっていることをみておこう．フーリエ級数についていままで学んできた話を要約すれば，繰り返しになるが，次のようになる．

$$L^2(-\ell,\ell) = \left\{ f : \begin{array}{c} f \text{ は } \mathbf{R} \text{ 上の周期 } 2\ell \text{ のルベーグ可測関数で，} \\ \|f\|_{L^2(-\ell,\ell)} = \left(\dfrac{1}{2\ell} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty \end{array} \right\}$$

とおき，$f \in L^2(-\ell,\ell)$ に対して

$$c_k(f) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-ik\omega x} \, dx \qquad (k \in \mathbf{Z},\ \omega = \pi/\ell)$$

とおく．f は，フーリエ部分和 $s_N[f](x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{ik\omega x}$ により，次の意味で近似される：

$$\|f - s_N[f]\|_{L^2(-\ell,\ell)} \to 0 \qquad (N \to \infty). \tag{6.1}$$

この証明において，重要であったことのひとつは，

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} e^{ij\omega x} e^{-ik\omega x} \, dx = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

ということであった．

さて，われわれがすでによく知っている線形代数では，次のようなことがわかっている：V を n 次元ベクトル空間とし，V に内積 $(\ ,\ )$ が定義されているものとする．$\{e_j\}_{j=1}^{n}$ を V のある正規直交基底とする．すなわち，$e_1, \ldots, e_n$

は V の基底で,

$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

を満たすものである (次節の定理 6.1 の証明のあとの段落参照). このとき, 任意の元 $x \in V$ は, $\{e_j\}_{j=1}^n$ により

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

と書くことができる.

線形代数のこの話とフーリエ級数展開とは大きな類似性がある. 実際, $f, g \in L^2(-\ell, \ell)$ に対して

$$(f, g)_{L^2(-\ell,\ell)} = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

とおき, $E_j(x) = e^{ij\omega x}$ とおく. すると

$$(E_j, E_k)_{L^2(-\ell,\ell)} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

であり,

$$s_N[f] = \sum_{j=-N}^{N} (f, E_j)_{L^2(-\ell,\ell)} E_j$$

と書くことができる. したがって, (6.1) は

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (f, E_j)_{L^2(-\ell,\ell)} E_j$$

と表すことができる. 結局, 大ざっぱにいって, **フーリエ級数展開は, $L^2(-\ell, \ell)$ の内積**[1] $(\ ,\ )_{L^2(-\ell,\ell)}$ **に関する正規直交基底** $\{E_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ **による表示であると**考えることができる.

有限次元ベクトル空間で正規直交基底が何組もとることができたように, $\{E_j\}$ だけが $L^2(-\ell, \ell)$ の正規直交基底ではなく, いろいろなものがある. そういったものを統一的にとり扱うため, 以下に無限次元ベクトル空間に関する線形代数を考える.

---

[1] 厳密な定義は次節で行う.

6.2 内積空間と基底

ベクトル空間の定義からはじめよう ([佐武] 参照).

定義 6.1 $\mathbf{K}$ によって, $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ を表すことにする. 集合 X が, $\mathbf{K}$ 上の**ベクトル空間** (あるいは線形空間) とは, X の任意の元 x, y に対して**和**とよばれる演算 $x+y$ が定義され, また X の任意の元 x と $\mathbf{K}$ の任意の元 α に対して**スカラー積**とよばれる演算 αx が定義され, 次の (i)–(vii) の条件を満たすことである:

(i) (和の結合則) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad (x, y, z \in X)$,

(ii) (和の交換則) $x+y = y+x \quad (x, y \in X)$,

(iii) (零元の存在) ある元 $0 \in X$ が存在し, すべての $x \in X$ に対して, $x+0 = x$ となる,

(iv) (逆元の存在) 任意の $x \in X$ に対して, ある $x' \in X$ が存在し, $x+x' = 0$ となる,

(v) (分配則) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x \ \ (\alpha, \beta \in \mathbf{K};\ x, y \in X)$,

(vi) (スカラー積の結合則) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{K};\ x \in X)$,

(vii) (単位元の存在) $1x = x \quad (x \in X)$.

次の問題は, すでに線形代数で学んだものである.

練習問題 (1) 零元 0 は一意的に定まることを示せ.
(2) $x \in X$ の逆元 $x' \in X$ は一意的に定まることを示せ.

以下では, x の逆元 x' を $-x$ で表す.
一般のベクトル空間に関する代数的ないくつかの定義を思い出しておこう.

定義 6.2 (1) (**一次結合**) $x_1, \ldots, x_n \in X$ とする. $\mathbf{K}$ の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ によって $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ と表される X の元を $x_1, \ldots, x_n$ の**一次結合**という.

(2) (**一次独立, 一次従属**) $x_1, x_2, \ldots \in X$ が**一次独立**であるとは, $x_1, x_2, \ldots$ の中から任意に有限個の元 $x_{i(1)}, \ldots, x_{i(n)}$ をとってきたとき, その一次結合 $\alpha_1 x_{i(1)} + \cdots + \alpha_n x_{i(n)}$ が 0 になるのは $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ に限ることである. 一次独立でないことを**一次従属**という.

(3) (**部分空間**) X の部分集合 M が X の**部分空間**であるとは, M の任意の元 x と y の一次結合が M の元になることである.

(4) (**生成**) E を X の部分集合とする. E の任意の有限個の元の一次結合全体からなる集合を $\mathrm{span}(E)$ と表す ($\mathrm{span}(E)$ は X の部分空間になっている).

次にベクトル空間 X に内積を定義しよう．まず $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ の場合からはじめる．

定義 6.3 X を $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とする．X の任意の二つの元 u, v に対し複素数 (u, v) が対応していて，次の条件 (i)–(iii) を満たすとき，(u, v) を u と v の**内積**という:

(i) (正値性) $(u, u) \geqq 0 \ (u \in X)$; $(u, u)=0 \Longleftrightarrow u=0$,

(ii) (共役対称性) $(u, v)=\overline{(v, u)}$ $(u, v \in X\,;\ ^{-}$ は複素共役を表す$)$,

(iii) (準双線形性) $(\alpha u+\beta v, w)=\alpha(u, w)+\beta(v, w)$

$(\alpha, \beta \in \mathbf{C};\ u, v, w \in X)$.

$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ の場合は次のように定義する．

定義 6.4 X を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする．X の任意の二つの元 u, v に対し実数 (u, v) が対応していて，上の条件 (i) と次の (ii)$'$, (iii)$'$ を満たすとき，(u, v) を u と v の**内積**という:

(ii)$'$ $(u, v)=(v, u)$,

(iii)$'$ $(\alpha u+\beta v, w)=\alpha(u, w)+\beta(v, w) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R};\ u, v, w \in X)$.

定義 6.5 $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間 X に内積 $(\ ,\ )$ が定義されているとき，組 $(X, (\ ,\ ))$ を**内積空間**という．

▶ **例 1** $L^2(-\ell, \ell)$ を本章のはじめに定義した集合とする．$L^2(-\ell, \ell) \ni f, g$，および $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して，和 $f+g$ とスカラー積 αf を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad (\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

により定義する．ミンコフスキーの不等式 (定理 1.19 または定理 A.1 参照) より

$$\left(\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)+g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqq \left(\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}+\left(\int_{-\ell}^{\ell}|g(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty$$

であり，また

$$\left(\int_{-\ell}^{\ell}|\alpha f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}=|\alpha|\left(\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}<\infty$$

であるから，$f+g,\ \alpha f \in L^2(-\ell, \ell)$ が容易にわかる．これらの演算により $L^2(-\ell, \ell)$ は $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間になっている．

$f, g \in L^2(-\ell, \ell)$ に対して,

$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)\overline{g(x)}|\,dx \leqq \left(\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\ell}^{\ell} |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < \infty$$

(シュヴァルツの不等式 (定理 1.18 または定理 A.1 参照)) であるから,

$$(f, g)_{L^2(-\ell,\ell)} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad (\in \mathbf{C})$$

を複素数として定義することができる. これがベクトル空間 $L^2(-\ell, \ell)$ に内積を定めることを証明する. 内積の公理のうち

$$(f, f)_{L^2(-\ell,\ell)} = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \tag{$*$}$$

以外の条件を満たすことはすぐに確認できるだろう. $(*)$ を示すには, 少し議論が必要である. まず, $f = g$ の解釈であるが, これから先 $L^2(-\ell, \ell)$ における二つの元 f, g が等しい, すなわち $f = g$ であるということを, ルベーグ測度に関して, ほとんどすべての $x \in (-\ell, \ell]$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことと定義する. これは m を $(-\ell, \ell]$ 上のルベーグ測度とするとき,

$$m\big(\{x \in (-\ell, \ell] :\ f(x) \neq g(x)\}\big) = 0$$

なることである. この定義によると,

$$h_1(x) = 1 \qquad (x \in (-\ell, \ell]),$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & (x \in (-\ell, \ell] \cap \mathbf{Q}) \\ 1 & (x \in (-\ell, \ell] \setminus \mathbf{Q}) \end{cases}, \qquad \mathbf{Q} = \{\text{ 有理数全体 }\}$$

は異なった関数であるが,

$$m\big(\{x \in (-\ell, \ell] :\ h_1(x) \neq h_2(x)\}\big) = m((-\ell, \ell] \cap \mathbf{Q}) = 0$$

であるから, われわれの定めた規約では $h_1 = h_2$ となってしまう. しかし, 内積の定義についての問題はおこらない. なぜならば, $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(-\ell, \ell)$ がわれわれの意味で $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$ を満たしていれば $f_1(x)\overline{g_1(x)} = f_2(x)\overline{g_2(x)}$ が, m に関しほとんどすべての x に対して成り立っているので,

$$\begin{aligned}(f_1, g_1)_{L^2(-\ell,\ell)} &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_1(x)\overline{g_1(x)}\,dx \\ &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_2(x)\overline{g_2(x)}\,dx = (f_2, g_2)_{L^2(-\ell,\ell)}\end{aligned}$$

となるからである．

この定義のもとに (*) が成り立つ．実際，

$$(f,f)_{L^2(-\ell,\ell)} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2\,dx$$

であるから，補題 A.4 より，$|f(x)|^2 = 0$ a.e. $x \in (-\ell,\ell]$，すなわち $f(x) = 0$ a.e. $x \in (-\ell,\ell]$ である． □

以上の議論から，$\big(L^2(-\ell,\ell),(\ ,\ )_{L^2(-\ell,\ell)}\big)$ が $\mathbf{C}$ 上の内積空間になっていることがわかった．

話を一般の $\mathbf{K}$ 上の内積空間 $(X,(\ ,\ ))$ に戻す．次に定義する量は X の元の大きさを測るのに使われる．

定義 6.6 $u \in X$ に対して，$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ とおく．$\|\cdot\|$ を**内積から導かれるノルム**という．

この量がベクトル空間の元の大きさを測っていることは，n 次元複素数空間を例として考えれば理解できるであろう．

▶ **例 2** $X = \mathbf{C}^n$ とし，$u = (u_1,\ldots,u_n)$, $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbf{C}$ に対して

$$(u,v) = u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

とする．このとき，$(X,(\ ,\ ))$ は内積空間で，

$$\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2} \quad (= |u|)$$

となっている． □

あとで必要になるので，内積から導かれるノルムの性質をいくつかあげておこう．

定理 6.1 (1) **(正値性)** $\|u\| \geqq 0$; $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ $(u \in X)$.

(2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ $(\alpha \in \mathbf{K},\ u \in X)$.

(3) **(三角不等式)** $\|u+v\| \leqq \|u\| + \|v\|$ $(u,v \in X)$.

(4) **(シュヴァルツの不等式)** $|(u,v)| \leqq \|u\|\,\|v\|$ $(u,v \in X)$.

証明 (4) シュヴァルツの不等式から証明しよう．$(u,v) \neq 0$ とし，$\lambda \in \mathbf{R}$ とする．このとき，

$$0 \leqq (u + \lambda(u,v)v, u + \lambda(u,v)v)$$

$$= \|u\|^2 + 2\lambda|(u,v)|^2 + \lambda^2|(u,v)|^2\|v\|^2$$

である．これを λ の 2 次式とみると，“判別式 $\leqq 0$” でなければならない．したがって，

$$|(u,v)|^4 - |(u,v)|^2\|u\|^2\|v\|^2 \leqq 0$$

である．これより $|(u,v)|^2 \leqq \|u\|^2\|v\|^2$ を得る．これでシュヴァルツの不等式の証明が終わった．

(3) 次に，三角不等式を示そう．これはシュヴァルツの不等式を使って証明される:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u,v) \\ &\leqq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| \\ &\leqq (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

他の主張 (1), (2) は内積の定義から明らかであろう． □

内積空間に基底および正規直交基底を定義する．まず，有限次元のベクトル空間での話を思い出しておこう．

n 次元ベクトル空間 V の一次独立な元の組 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ が基底をなすとは，任意の $u \in V$ に対して，ある $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ が存在し

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

となることである．また特に，V の内積 (,) に関して

$$(e_i, e_j) == \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとき，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を**正規直交基底**という．

一般の内積空間 $(X, (\ ,\ ))$ では，次のように定義する．

定義 6.7 $\mathbf{Z}^d = \mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ の d 個の直積) とする．$j = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbf{Z}^d$ に対して，$|j| = |j_1| + \cdots + |j_d|$ とし，$j = (j_1, \ldots, j_d), k = (k_1, \ldots, k_d)$ に対して $j = k$ を $j_i = k_i$ $(i = 1, \ldots, d)$ とする．またそうでないとき $j \neq k$ と表す．

$\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ とする．X の元の族 $\{e_k\}_{k \in \Lambda}$ が X の**基底**をなすとは，

(i) $\{e_k\}_{k\in\Lambda}$ から任意に有限個の元 $\{e_{i(1)}, \ldots, e_{i(n)}\}$ をとると，それは一次独立である，

(ii) 任意の $u \in X$ に対して，ある $\alpha_k \in \mathbf{K}$ $(k \in \Lambda)$ が存在し，

$$\lim_{N\to\infty} \left\| u - \sum_{k\in\Lambda,\, |k| \leqq N} \alpha_k e_k \right\| = 0,$$

を満たすことである[2]).

さらに,

$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \tag{iii}$$

を満たすとき,$\{e_k\}_{k\in\Lambda}$ を**正規直交基底**という.

▶ **例 3** 前節のはじめに記したことから,$\{e^{ik\omega x}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(-\ell,\ell)$ の正規直交基底になっている. ▯

6.3 ヒルベルト空間

有限次元の場合と異なり,一般の内積空間では,基底の定義の中に「収束」という代数的でない概念が使われている.したがって,内積空間上で議論を進める場合,線形代数では現れなかった「収束」に関する議論もしなければならない.しかし,テクニカルなことをいえば,内積空間は代数的な特性をもつ公理系からなっており,それをもとにして「収束」という位相的な性質を論ずることはほとんど不可能である.

内積空間の公理系に位相的な公理系を加えたものが,次にあげるヒルベルト空間である.

定義 6.8 $(X,(\ ,\ ))$ を $\mathbf{K}$ 上の内積空間とする.X が次の条件 $(*)$ を満たすとき,X を $\mathbf{K}$ 上の**ヒルベルト空間**という.

$(*)$ $u_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が

$$\|u_n - u_m\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty) \tag{6.2}$$

を満たすとき,ある $u \in X$ が存在して,

$$\|u - u_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

この (6.2) を満たす X の元の列 $\{u_n\}$ を**コーシー列**という.以下,本書では記述を簡略化するため,$\|u_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ のことを $\lim_{n\to\infty} u_n = u$,あるいは $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ とも表す.性質 $(*)$ を**完備性**という.

---

[2]) これは代数的な意味の基底とは異なる.

注意 条件 (*) について解説しておこう.「収束」に関するとり扱い方法が一応完成しているのは $X = \mathbf{R}$ の場合であり，実数列の収束についてはいろいろな定理が知られている．その中で，実数列の収束の判定法として非常に有効なものにコーシーの判定法がある．

[コーシーの判定法] 実数列 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ がある実数 x に収束するための必要十分条件は，

$$|x_n - x_m| \to 0 \qquad (n, m \to 0)$$

となることである．

この判定法が一般の内積空間でも使えれば大変ありがたい．$(X, (\ ,\ ))$ においてすぐにわかることは，$\|x_j - x\| \to 0\ (j \to \infty)$ ならば $\|x_n - x_m\| \to 0\ (n, m \to \infty)$ なることである．しかし，この逆が成り立たない内積空間をつくることができる．そこで，コーシーの判定法の十分性のほうを公理として加えたのがヒルベルト空間なのである．

命題 6.2 X をヒルベルト空間とする．$\{u_n\}$ をコーシー列とするとき，$\|u_n - u\| \to 0\ (n \to \infty)$ となる u がただ一つ存在する．

証明 u の存在はヒルベルト空間の公理より明らかであるから，一意性を証明する．$\|u_n - v\| \to 0\ (n \to \infty)$ を満たす $v \in X$ を考える．このとき，

$$\|u - v\| \leqq \|u - u_n\| + \|u_n - v\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるから，$u = v$ である． □

以下に示すように，$L^2(-\ell, \ell)$ はヒルベルト空間になっている．

定理 6.3 $(L^2(-\ell, \ell), (\ ,\ )_{L^2(-\ell,\ell)})$ は $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間である．

証明 条件 (*) を証明すればよいが，それは定理 1.25 による． □

定理 6.4 S を集合，$\mathcal{B}$ を S の完全加法族，μ を可測空間 $(S, \mathcal{B})$ 上の測度とし，

$$L^2(S, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : \begin{array}{l} f \text{ は } S \text{ 上の } \mathcal{B}\text{–可測関数で，} \\ \|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_S |f(x)|^2 \, d\mu(x) \right)^{1/2} < \infty \end{array} \right\}$$

とする．$f, g \in L^2(S, \mathcal{B}, \mu)$，$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して，

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \qquad (x \in S)$$

と定義する．この演算により，$L^2(S, \mathcal{B}, \mu)$ は $\mathbf{K}$ 上の線形空間となる．このと

き，内積 $(\ ,\ )_2$ を

$$(f,g)_2 = \int_S f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x)$$

とし，また，

$$\mu(\{x \in S:\ f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

のとき $f = g$ と定義する．この定義のもとで $(L^2(S,\mathcal{B},\mu),(\ ,\ )_2)$ は $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間になっている．

証明 定理 1.25 の証明と同様にしてできる． □

あとの議論で必要になるので，ヒルベルト空間にいくつかの位相的な概念を導入しておこう．

定義 6.9 (1) **(開集合)** X の部分集合 A が**開集合**であるとは，任意の $a \in A$ に対して，ある正数 ε が存在し，

$$B(a,\varepsilon) := \{x \in X : \|x - a\| < \varepsilon\} \subset A$$

が成り立つ集合のことである．

(2) **(閉包)** X の部分集合 A に対して

$$\overline{A} = \left\{ u \in X :\ \begin{array}{l} \text{ある } u_n \in A\ (n = 1, 2, \dots) \text{ が存在し,} \\ \|u_n - u\| \to 0\ (n \to \infty) \text{ となる.} \end{array} \right\}$$

を A の**閉包**という．$\overline{M} = M$ のとき M を**閉集合**といい，また，$\overline{M} = X$ のとき M は X で**稠密**であるという．さらに，X の部分空間でありかつ閉集合になっているものを**閉部分空間**という．

6.4 正規直交基底と一般化フーリエ級数

本節では，フーリエ級数の理論をヒルベルト空間上に一般化する．

定義 6.10 $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ とする．内積空間 $(X,(\ ,\ ))$ の元 $\{e_j\}_{j\in\Lambda} \subset X$ が

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}$$

を満たすとき，$\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ を X の**正規直交系**という[3]．ここで，δ_{jk} はクロネッ

[3] 正規直交系と正規直交基底の違いに注意すること (定義 6.7 (ii) が課せられていない)．

カーのデルタである．すなわち，

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k), \\ 0 & (j \neq k). \end{cases}$$

次の定理は，一般の正規直交基底に対してフーリエ級数の理論を一般化したものである．

定理 6.5 $(X, (\ ,\ ))$ をヒルベルト空間とし，$\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ $(\Lambda \subset \mathbf{Z}^d)$ を X の正規直交系とする．このとき，次の (i)–(v) は互いに同値である．

(i) $\mathrm{span}(\{e_i\}_{j\in\Lambda})$ は X で稠密である．

(ii) **(フーリエ級数展開)** 任意の $u \in X$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \left\| u - \sum_{j\in\Lambda,\,|j|\leqq N} (u, e_j)e_j \right\| = 0,$$

したがって，$\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ は X の正規直交基底である．

(iii) **(パーセヴァルの等式)** 任意の $u \in X$ に対して

$$\|u\|^2 = \sum_{j\in\Lambda} |(u, e_j)|^2.$$

(iv) 任意の $u, u' \in X$ に対して，

$$\sum_{j\in\Lambda} |(u, e_j)\overline{(u', e_j)}| < +\infty, \quad \text{かつ} \quad (u, u') = \sum_{j\in\Lambda} (u, e_j)\overline{(u', e_j)}.$$

(v) 任意の $j \in \Lambda$ に対して，$(u, e_j) = 0$ ならば，$u = 0$.

この定理を証明するまえに，ベッセルの不等式を内積空間上で証明しておこう．

命題 6.6 (ベッセルの不等式) $(X, (\ ,\ ))$ を内積空間とし，$\{e_j\}_{j\in\Lambda}$ $(\Lambda \subset \mathbf{Z}^d)$ を X の正規直交系とする．このとき，任意の $u \in X$ に対して

$$\sum_{j\in\Lambda} |(u, e_j)|^2 \leqq \|u\|^2$$

が成り立つ．

証明 $\Lambda_N = \{j \in \Lambda : |j| \leqq N\}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \left\| u - \sum_{j\in\Lambda_N} (u, e_j)e_j \right\|^2 \\ &= \left(u - \sum_{j\in\Lambda_N} (u, e_j)e_j,\ u - \sum_{j\in\Lambda_N} (u, e_j)e_j \right) \end{aligned}$$

$$= \|u\|^2 - \sum_{j\in\Lambda_N}(u,(u,e_j)e_j) - \sum_{j\in\Lambda_N}((u,e_j)e_j,u) + \sum_{j,k\in\Lambda_N}((u,e_j)e_j,(u,e_k)e_k)$$

$$= \|u\|^2 - \sum_{j\in\Lambda_N}|(u,e_j)|^2 - \sum_{j\in\Lambda_N}|(u,e_j)|^2 + \sum_{j,k\in\Lambda_N}(u,e_j)\overline{(u,e_k)}(e_j,e_k)$$

$$= \|u\|^2 - \sum_{j\in\Lambda_N}|(u,e_j)|^2.$$

ゆえに $\sum_{j\in\Lambda_N}|(u,e_j)|^2 \leqq \|u\|^2$ である．ここで $N\to\infty$ とすれば，求める不等式が得られる． □

定理 6.5 の証明 $u\in X$ に対して，$S_N[u] = \sum_{j\in\Lambda_N}(u,e_j)e_j$ とおく．

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) $(S_N[u],S_N[u']) = \sum_{j,k\in\Lambda_N}((u,e_j)e_j,(u',e_k)e_k) = \sum_{j\in\Lambda_N}(u,e_j)\overline{(u',e_j)}$ となる．

$$\begin{aligned}
&|(u,u') - (S_N[u],S_N[u'])| \\
&\quad = |(u,u') - (S_N[u],u') + (S_N[u],u') - (S_N[u],S_N[u'])| \\
&\quad \leqq |(u-S_N[u],u')| + |(S_N[u],u'-S_N[u'])| \\
&\quad \leqq \|u-S_N[u]\|\,\|u'\| + \|S_N[u]\|\,\|u'-S_N[u']\|.
\end{aligned}$$

ここで，$\|S_N[u]\|^2 = \sum_{j\in\Lambda_N}|(u,e_j)|^2 \leqq \|u\|^2$ であるから，$N\to\infty$ とすれば，

$$(S_N[u],S_N[u']) \to (u,u')$$

となる．また，

$$\sum_j |(u,e_j)(u',e_j)| \leqq \left(\sum_j |(u,e_j)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_j |(u',e_j)|^2\right)^{1/2}$$
$$\leqq \|u\|\,\|u'\| < \infty.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) $u=u'$ とおけばよい．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) ベッセルの不等式の証明より，

$$\left\|u - \sum_{j\in\Lambda_N}(u,e_j)e_j\right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j\in\Lambda_N}|(u,e_j)|^2 \to 0 \qquad (N\to\infty).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (v) 仮定より，すべての N に対して $S_N[u]=0$ であるから，

$$\|u\| = \|u - S_N[u]\| \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

となり $u=0$.

(v) $\Longrightarrow$ (ii)

$$\|S_{N+n}[u] - S_N[u]\|^2 = \left(\sum_{k\in\Lambda_{N+n}\setminus\Lambda_N}(u,e_k)e_k,\ \sum_{k\in\Lambda_{N+n}\setminus\Lambda_N}(u,e_k)e_k\right)$$

$$= \sum_{k \in \Lambda_{N+n} \setminus \Lambda_N} |(u, e_k)|^2.$$

ところが，ベッセルの不等式より，$N, n \to \infty$ のとき，(最右辺) $\to 0$ である．したがって，ヒルベルト空間の公理より，ある $u' \in X$ が存在し，

$$\|u' - S_N[u]\| \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

となる．ゆえに，

$$(u', e_n) = \lim_{N \to \infty} (S_N[u], e_n) = (u, e_n).$$

すなわち，$(u' - u, e_n) = 0$ である．ここで (v) により $u = u'$ となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i) は明らか．

(i) $\Longrightarrow$ (v) $(u, e_n) = 0$ とする．$\{e_j\}_{j \in \Lambda}$ の有限個の元のある一次結合で表される X の元 $u_1, u_2, \ldots$ によって

$$\|u - u_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

とできる．$(u, u_n) = 0$ であるから，$(u, u) = \lim_{n \to \infty} (u, u_n) = 0$ である． □

6.5 直交分解定理

次章以降で必要になるので，ヒルベルト空間における直交分解定理を証明しておく．有限次元ベクトル空間における直交分解定理は線形代数の基本定理のひとつであるが，ここではそれを無限次元の場合に証明する．

まず，直交分解の定義をする．

定義 6.11 (直交分解) X_0, X_1, X_2 を X の部分空間とし，X_0, X_1, X_2 は次の (i), (ii) を満たすとする:

(i) 任意の $u \in X_0$ に対して，ある $u_1 \in X_1$ とある $u_2 \in X_2$ で

$$u = u_1 + u_2 \tag{6.3}$$

となるものが存在する．また，任意の $u_1 \in X_1, u_2 \in X_2$ に対して $u_1 + u_2 \in X_0$ である．

(ii) 任意の $u_1 \in X_1$ と $u_2 \in X_2$ に対して，$(u_1, u_2) = 0$ となっている．

このとき，X_0 は X_1 と X_2 に**直交分解**されるといい，

$$X_0 = X_1 \oplus X_2$$

で表す．

注意 (1) $X_0 = X_1 \oplus X_2$ のとき，$X_1 \cap X_2 = \{0\}$ である．なぜならば，$u \in X_1 \cap X_2$ とすると，定義 6.11 (ii) より $\|u\|^2 = (u,u) = 0$ となり，$u = 0$ でなければならない．

(2) $u \in X_0$ に対して，定義 6.11 (6.3) の u_1, u_2 は一意的に存在する．実際，もし $u = u_1' + u_2'$ なる $u_1' \in X_1$ と $u_2' \in X_2$ が存在するならば，$u_1 + u_2 = u = u_1' + u_2'$ より

$$u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in X_1 \cap X_2 = \{0\}.$$

ゆえに，$u_1 = u_1'$, $u_2 = u_2'$ である．

直交分解定理とは次のものである．

定理 6.7 (直交分解定理) M を X の閉部分空間とする．このとき，X のある閉部分空間 M' で

$$X = M \oplus M'$$

となるものが一意的に存在する．

証明 M に対して

$$M' = \{u \in X : \text{任意の } v \in M \text{ に対して，} (u,v) = 0\}$$

とおく．M' は明らかに X の部分空間である．この M' が求める部分空間であることを証明する．

<u>M' が閉集合であること:</u>　$u_n \in M'$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で，ある $u \in X$ に対して $\|u_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ であるとする．このとき，任意の $v \in M$ に対して

$$(u,v) = \lim_{n \to \infty} (u_n, v) = 0$$

であるから，$u \in M'$ である．

以下，直交分解の条件 (i), (ii) を X, M, M' に対して示す．

<u>条件 (ii) の証明:</u>　M' の定義から明らかであろう．

<u>条件 (i) の証明:</u>　まず，次の補題から証明する．

補題 6.8 $u, v \in X$ に対して

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (u+v, u+v) + (u-v, u-v) \\
&= \|u\|^2 + (u,v) + (v,u) + \|v\|^2 + \|u\|^2 - (u,v) - (v,u) + \|v\|^2 \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

□

任意の $u \in X$ をとる．このとき，$v \in M$ と $w \in M'$ で $u = v + w$ を満たすようなものを探そう．X が有限次元の内積空間の場合，v は u から M に下した垂線の足とし，$w = u - v$ とすれば，これが求める分解であることがわかる．ここで垂線の足は u と M との最短距離を与える点であることに注意しておく．このことを一般のヒルベルト空間の設定で考える．まず，u と M との距離を次のように定義する:

$$d = \inf\{\|u - x\| : x \in M\}.$$

このとき，$d = \|u - v\|$ となる $v \in M$ が存在することを証明しよう．d の定義より，ある $u_n \in M$ が存在し，$\|u - u_n\| \to d$ $(n \to \infty)$ であるから，補題 6.8 より

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - u\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(u_n - u_m)\right\|^2 \\
&\qquad = \frac{1}{4}\left(\|u_n + u_m - 2u\|^2 + \|u_n - u_m\|^2\right) \\
&\qquad = \frac{1}{2}(\|u_n - u\|^2 + \|u_m - u\|^2) \to d^2 \qquad (n, m \to \infty)
\end{aligned}$$

となる．ここで，$(u_n + u_m)/2 \in M$ であるから，

$$\left\|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - u\right\|^2 \geqq d^2$$

である．したがって，$\|(u_n - u_m)/2\|^2 \to 0$ $(n, m \to \infty)$ となる．X の完備性から，ある $v \in X$ で $\|u_n - v\| \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものが存在するが，いま，M が閉部分空間であることより，$v \in M$ であり，さらに

$$\|u - v\| = \lim_{n \to \infty} \|u - u_n\| = d$$

を満たしている．

あとは $w = u - v$ とおき，$w \in M'$ であることを証明すればよい．そのため，任意の $x \in M$ に対して $(w, x) = 0$ となることを証明する．$x \neq 0$ の場合を証明すれば十分である．この場合，必要ならば x の代わりに $x/\|x\|$ を考えることにより，$\|x\| = 1$ と仮定してよい．このとき次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
d^2 &= \|w\|^2 \\
&= \|w - (w, x)x + (w, x)x\|^2 \\
&= \|w - (w, x)x\|^2 + \|(w, x)x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(w - (w, x)x, (w, x)x) \\
&= \|w - (w, x)x\|^2 + \|(w, x)x\|^2 \\
&\geqq d^2 + |(w, x)|^2.
\end{aligned}$$

ゆえに，$(w, x) = 0$ である．

最後に M' の一意性を証明する．すなわち，

$$X = M \oplus M' = M \oplus M''$$

なる X の閉部分空間 M', M'' が存在するならば，必ず $M' = M''$ となることを証明する．まず，$u \in M'$ ならば $u = v + v'' \in M \oplus M''$ と直交分解できる．ゆえに，

$$(v, v) = (v, u - v'') = 0$$

であるから，$u = v'' \in M''$ である．すなわち $M' \subset M''$ となる．次に，M' と M'' の役割を入れ替えて同じ議論を繰り返せば，$M'' \subset M'$ も示すことができる． □

定義 6.12 定理 6.7 の M' を M の**直交補空間**といい，$M^\perp$ で表す．

X の閉部分空間 X_0 と X_0 の閉部分空間 X_1 を考える．X_0 は X の内積 $(\cdot,\cdot)$ によってヒルベルト空間になるので，直交分解定理から $X_0 = X_1 \oplus X_2$ なる X_0 の閉部分空間 X_2 がただ一つ存在する．以下では，X_2 のことを $X_0 \ominus X_1$ と表す．特に $X \ominus X_1$ が $X_1^\perp$ である．

定義 6.13 (直交射影) M を X の閉部分空間とする．定理 6.7 より，任意の $u \in X$ に対して，$u = u_1 + u_2$ $(u_1 \in M,\ u_2 \in M^\perp)$ と一意的に分解できる．そこで

$$P_M(u) = u_1$$

と定義し，P_M を X から M への**直交射影作用素**，あるいは単に**直交射影**という．

定理 6.9 M を X の閉部分空間とする．このとき，X から M への直交射影 P_M は

$$\|P_M u\| \leqq \|u\| \qquad (u \in X)$$

を満たす．

証明 $u = u_1 + u_2$ を u の直交分解とすると，

$$\|u\|^2 = (u_1 + u_2, u_1 + u_2) = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$$

より，$\|P_M(u)\| = \|u_1\| \leqq \|u\|$ である． □

定理 6.10 X, M, P_M を前定理と同じものとする．このとき $P_M^2 = P_M$ であり，次の式が成り立つ:

$$(P_M u, v) = (u, P_M v) \qquad (u, v \in X).$$

証明は読者にまかせる．

7章

直交関数系

本章では $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 以外の正規直交基底について述べる．それらは $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ にはない新しい応用をもたらしてくれる．

7.1 いろいろな直交多項式系

正規直交基底のひとつのつくり方は，線形代数でもお馴染みのグラム・シュミットの直交化法である．これについて記しておこう．

定理 7.1 (グラム・シュミットの直交化法) $(X, (\ ,\ ))$ をヒルベルト空間とする．$\left\{u_j\right\}_{j=0}^{\infty} \subset X$ が一次独立でかつ $\operatorname{span}\left(\left\{u_j\right\}_{j=0}^{\infty}\right)$ が X で稠密であるとする．

(a) X の正規直交基底 $\left\{e_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ で，次の条件 (i), (ii) を満たすものが存在する：

(i) 各 u_n は $e_0, \ldots, e_n$ の一次結合で表される．

(ii) 各 e_n は $u_0, \ldots, u_n$ の一次結合で表される．

(b) $\left\{e'_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ を条件 (i), (ii) を満たす正規直交基底とする．このとき $|\alpha_j| = 1$ なる $\alpha_j \in \mathbf{K}$ が存在し，$e'_j = \alpha_j e_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$ となる．

証明 (a)

$$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}, \qquad e_1 = \frac{u_1 - (u_1, e_0)e_0}{\|u_1 - (u_1, e_0)e_0\|}, \quad \cdots, \quad e_n = \frac{u_n - \sum_{j=0}^{n-1}(u_n, e_j)e_j}{\left\|u_n - \sum_{j=0}^{n-1}(u_n, e_j)e_j\right\|}$$

と定めていく．ただし，ここで e_j のつくり方と $u_0, \ldots, u_n$ の一次独立性より，

$$u_n - \sum_{j=0}^{n-1}(u_n, e_j)e_j \neq 0$$

である．さらに，各 e_n は $u_0, \ldots, u_n$ の一次結合で書けているので，(ii) が成り立つ．

(i) も e_n のつくり方から明らかである．

また，$(e_j, e_k) = \delta_{jk}$ の確認も容易にできる．

次に，$\{e_j\}$ が基底をなすことを示そう．いま，$(u, e_j) = 0\ (\forall j)$ が成り立っているとする．このことと (i) より，$(u, u_j) = 0\ (\forall j)$ である．$\mathrm{span}\left(\{u_j\}_{j=0}^{\infty}\right)$ は X で稠密であるから，$\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ の一次結合からなる元の列 $p_1, p_2, \ldots$ が存在し，$u = \lim_{j\to\infty} p_j$ である．ここで，$(u, p_j) = 0$ であるから，

$$\|u\|^2 = (u, u) = \lim_{j\to\infty}(u, p_j) = 0.$$

したがって定理 6.5 より，$\{e_j\}$ は正規直交基底になっている．

(b) $\{e'_k\}_{k=0,1,\ldots}$ を次の (i)′, (ii)′ を満たす正規直交基底とする:

(i)′ 各 u_n は $e'_0, \ldots, e'_n$ の一次結合で表される．

(ii)′ 各 e'_n は $u_0, \ldots, u_n$ の一次結合で表される．

このとき，$e'_k = \alpha_k e_k$, $|\alpha_k| = 1$ となる $\alpha_k \in \mathbf{K}$ の存在を数学的帰納法を使って証明する．$k = 0$ の場合は定義より明らかである．$0, 1, \ldots, k-1$ のとき正しいとして k の場合を示そう．条件 (i), (ii), (i)′, (ii)′ より $e'_k = \sum_{j=0}^{k} c_j e_j$ である．したがって，$l = 0, \ldots, k-1$ に対して，$(e'_k, e_l) = c_l$ である．一方，帰納法の仮定より，

$$c_l = (e'_k, e_l) = \alpha_l^{-1}(e'_k, e'_l) = 0$$

である．ゆえに $e'_k = c_k e_k$ が得られる．明らかに $|c_k| = 1$ なので $\alpha_k = c_k$ とおけばよい． □

$1, x, x^2, \ldots$ という関数系に対してこのグラム・シュミットの直交化法を使って，いくつかの直交関数系をつくってみよう．土台となるヒルベルト空間をいろいろととり換えることによって，同じ操作からさまざまな直交関数系が得られることがわかるはずである．

7.1.1 ルジャンドル多項式系

まず，ルジャンドル多項式系という直交関数系をつくる．土台とするヒルベルト空間は次のものである:

$$L^2([-1,1]) = \left\{ f : \begin{array}{l} f \text{ は } [-1,1] \text{ 上のルベーグ可測関数で，} \\ \|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < \infty \end{array} \right\}.$$

ただし，内積は

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx \qquad (f, g \in L^2([-1,1]))$$

とする．ここで $\mathrm{span}\{1, x, x^2, \ldots\}$ が $L^2([-1,1])$ で稠密になっていることをみておこう．ルベーグ積分論より，任意の $f \in L^2([-1,1])$ に対して，$[-1,1]$ 上の連続関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_2 = 0 \tag{7.1}$$

となっていることがわかっている (系 1.29 参照)．また，ワイエルシュトラスの多項式近似定理より，$[-1,1]$ 上の任意の連続関数 g に対して，ある多項式列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，

$$\|g - p_n\|_2^2 \leqq \sup_{t\in[-1,1]} |g(t) - p_n(t)|^2 \cdot \int_{-1}^{1} dt \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{7.2}$$

が成り立つ．これらのことより $\mathrm{span}\{1, x, x^2, \ldots\}$ が $L^2([-1,1])$ で稠密であることがわかる．

さて，グラム・シュミットの直交化法で $\{1, x, x^2, \ldots\}$ を直交化していくと次のようになる:

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad e_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \ \ldots.$$

しかしながら，一つひとつをこのようにグラム・シュミットの直交化法で計算していくのでは大変である．そこで一般の $e_n(x)$ を求めるための便利な公式 (**ロドリゲスの公式**) があるので，それを紹介しておく．この公式は，

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

として，これから一般の e_n が

$$e_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

によって与えられるというものである．

このことを証明する．定義より $P_n(x)$ は n 次の多項式であって，$n > m$ のとき，部分積分より次がわかる:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx &= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\,dx \\ &= \frac{-1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m\,dx \\ &= \cdots\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\,dx = 0.$$

また，$m=n$ のときは

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,dx &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\,dx \\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx \\ &= \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である．したがって，

$$e'_n(x) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

とおけば，これらは正規直交系になる．P_n は n 次の多項式であるから，定理 7.1 (i), (ii) を満たす．したがって，$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ は正規直交基底であり，しかもある $\alpha_n \in \mathbf{R}$, $|\alpha_n| = 1$ が存在し，

$$e_n(x) = \alpha_n e'_n(x) \qquad (x \in [-1,1])$$

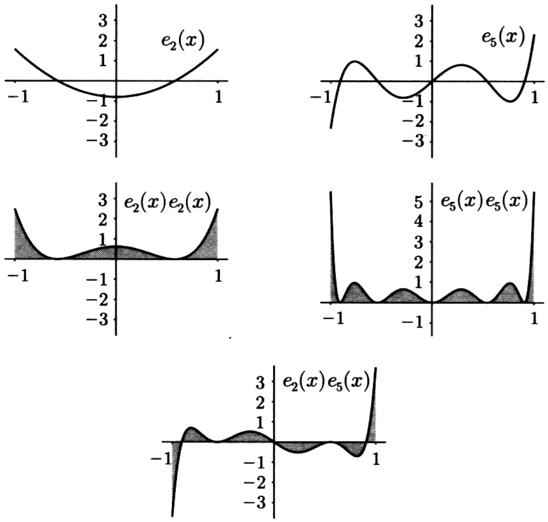


図 7.1 ルジャンドル多項式 $e_n(x) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

となる．ところで，$e'_n(x)$ の定め方から $e'_n(x)$ の最高次の項の係数は正である．また，$e_n(x)$ の最高次の項の係数も正である．したがって，$\alpha_n = 1$ でなければならない．よって $e'_n = e_n$ である．$\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を**ルジャンドル多項式系**という．図 7.1 はルジャンドル多項式のうち $e_2(x), e_5(x)$ のグラフである．$e_2(x)^2$, $e_5(x)^2$ の積分が 1 であり，また $e_2(x)e_5(x)$ の積分が 0 になっていることが 図 7.1 より想像できるであろう．

ルジャンドル多項式と微分方程式　ルジャンドル多項式は，次の常微分作用素

$$T(u) = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{du}{dx}\right)$$

の $L^2([-1,1])$ に属する固有関数で，その固有値は $-n(n+1)$ であることが簡単な計算でわかる．

証明は読者にまかせる．

7.1.2 ラゲール陪多項式系

$k \in \mathbf{Z}_+$ とし，$(0,\infty)$ 上の測度 $d\mu(x) = x^k e^{-x} dx$ を考える．

さらに，$X = L^2((0,\infty), d\mu)$ とし，これを内積

$$(f,g)_\mu = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

によるヒルベルト空間であるとし，$\|f\|_\mu = (f,f)_\mu^{1/2}$ とおく．

はじめに，$\mathrm{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ が X で稠密な部分空間であることを示し，次にグラム・シュミットの直交化法で得られる多項式を具体的に求める．

定理 7.2 $\mathrm{span}\{1, x, x^2, \dots\}$ は X で稠密である．

この定理の証明に必要な次の補題を示すことからはじめる．

補題 7.3 f を $\mathbf{R}$ 上の関数で，任意に $\xi \in \mathbf{R}$ をとって固定したとき，

$$|f(x)|e^{|\xi x|}e^{-x^2} \in L^1(\mathbf{R}, dx)$$

であるとする．もしも，すべての多項式 $P(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)P(x)e^{-x^2}\, dx = 0$$

であるならば，$f(x)=0$ a.e. $x\in\mathbf{R}$ である．

証明 $e^{-i\xi x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-i\xi x)^n/n!$ であり，任意の $N\in\mathbf{Z}_+$ に対して，

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(-i\xi x)^n}{n!}\right|\leqq\sum_{n=0}^{N}\frac{|\xi x|^n}{n!}\leqq e^{|\xi x|}$$

であるから，ルベーグの収束定理と仮定より，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}f(x)e^{-x^2}dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}x^nf(x)e^{-x^2}dx\\&=0.\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathcal{F}[fe^{-x^2}](\xi)=0$ $(\xi\in\mathbf{R})$ であるから，定理 A.3 より $f(x)=0$ a.e. $x\in\mathbf{R}$ を得る． □

定理 7.2 の証明 $L=\mathrm{span}\{1,x,x^2,\dots\}$ とおく．示すべきことは，$g\in X$ が

$$\int_0^{\infty}g(x)x^nd\mu(x)=0\qquad(n=0,1,2,\dots)\tag{7.3}$$

を満たすならば $g=0$ となることである．実際これが示せれば，$\overline{L}^{\perp}=\{0\}$ であるから，直交分解定理より $X=\overline{L}$ となる．

以下 $g(x)=0$ a.e. x を示す．変数変換より，任意の n に対して，

$$0=\int_0^{\infty}g(x)x^nx^ke^{-x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x^2)|x|^{2k+1}x^{2n}e^{-x^2}dx$$

である．また，$g(x^2)|x|^{2k+1}x^{2n+1}e^{-x^2}$ は奇関数[1)]であるから，

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}g(x^2)|x|^{2k+1}x^{2n+1}e^{-x^2}dx$$

である．ゆえに，任意の多項式 $P(x)$ に対して

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}g(x^2)|x|^{2k+1}P(x)e^{-x^2}dx$$

となる．ここで $f(x)=g(x^2)|x|^{2k+1}$ とおくと，この等式と次の不等式より，f が補題 7.3 の条件を満たしていることがわかる：シュヴァルツの不等式より，

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}g(x^2)|x|^{2k+1}e^{|\xi x|}e^{-x^2}dx\\&\leqq\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x^2)|^2|x|^{2k+1}e^{-x^2}dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2k+1}e^{2|\xi x|}e^{-x^2}dx\right)^{1/2}\\&\leqq\|g\|_{\mu}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{2k+1}e^{2|\xi x|}e^{-x^2}dx\right)^{1/2}<\infty.\end{aligned}$$

[1)] $h(-x)=-h(x)$ を満たす関数のこと．

よって，補題 7.3 より $g=0$ がわかる． □

定理 7.2 より，$1, x, x^2, \ldots$ から，グラム・シュミットの直交化法で X の正規直交基底 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ をつくることができる．このとき，e_n は次にあげるラゲール陪多項式とよばれる多項式になっている (定理 7.5 参照)．

定義 7.1 (ラゲール陪多項式) $k, n \in \mathbf{Z}_+$ に対して

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{k+n}e^{-x}\right)$$

とおく．この $L_n^k(x)$ を**ラゲール陪多項式**という[2)]．

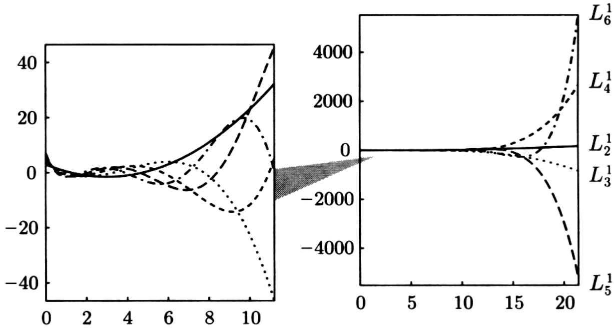


図 7.2 ラゲール陪多項式 $L_n^k(x) = \dfrac{x^{-k}e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{k+n}e^{-x}\right)$．

ライプニッツの公式より

$$L_n^k(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n+k}{n-j}\frac{x^j}{j!}$$

である．したがって，$L_n^k(x)$ は n 次の多項式である．このとき，次が成り立つ．

定理 7.4
$$(L_n^k, L_m^k)_\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \Gamma(n+1+k)/n! & (n=m) \end{cases}$$

ただし，Γ はガンマ関数とする．

---

2) 書物によっては (たとえば [犬井])，ここでのラゲール陪多項式を**ソニンの多項式**といい，$(-1)^k n! L_{n-k}^k(x)$ をラゲール陪多項式とよんでいることもあるので，他書を読むときは注意してほしい．ここでは [アル] にある用法に従った．

証明 $n \neq m$ とする．このとき $n < m$ を仮定しても一般性は失われない．$n < m$ のとき，部分積分の公式より

$$\begin{aligned}(L_n^k, L_m^k)_\mu &= \frac{1}{m!}\int_0^\infty L_n^k(x)\frac{d^m}{dx^m}(x^{k+m}e^{-x})\,dx \\ &= \frac{(-1)^m}{m!}\int_0^\infty \left(\frac{d^m}{dx^m}L_n^k(x)\right)x^{k+m}e^{-x}\,dx = 0.\end{aligned}$$

(ここで最後の等号は，$L_n^k(x)$ が n 次 $(n < m)$ の多項式であることによる．)

また，$n = m$ のときは，

$$(L_n^k, L_n^k)_\mu = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{k+n}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+1+k)}{n!}$$

となる． □

この定理より次のことがわかる．

定理 7.5 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ を $\{1, x, x^2, \ldots\}$ からグラム・シュミットの直交化法でつくった X の正規直交基底とする．このとき，次式が成り立つ:

$$e_n(x) = (-1)^n\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+k+1)}}L_n^k(x).$$

証明 右辺を $e'_n(x)$ とおく．$L_n^k(x)$ が n 次多項式であるから，$\{1, x, x^2, \ldots\}$ は $\{e_0, e_1, \ldots\}$ で生成することができる．したがって，$\{e'_n\}_{n=0}^\infty$ は X の正規直交基底で，定理 7.1 の条件を満たしている．したがって，$e_n = \alpha_n e'_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を満たす定数 $\alpha_n \in \mathbf{C}$, $|\alpha_n| = 1$ が存在する．ところが，e'_n と e_n の最高次の項の係数は正なので $\alpha_n = 1$ となる． □

ラゲール陪多項式と微分方程式　ラゲール陪多項式 $L_n^k(x)$ は，常微分作用素

$$T_k = x\frac{d^2}{dx^2} + (k+1-x)\frac{d}{dx}$$

の固有値 $-n$ の固有関数になっている (各自試みよ).

ルジャンドル多項式やラゲール陪多項式と同じようにして得られるものに，チェビシェフ多項式系，エルミート多項式系がある．これらについては巻末文献 [犬井] を参照してほしい.

7.2 d 次元球面調和関数 (球関数)

フーリエ級数を関数論的な視点から多変数に拡張したものが球面調和関数である．球面調和関数は球面上の関数に対する一般化フーリエ級数のひとつになっていて，球面上の解析学をはじめ，あとで学ぶクーロンポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の固有値問題に決定的な応用をもっている．本章では，d 次元球面調和関数の基礎的な部分を述べる．

とりあえず，球面に関するいくつかの記号を導入しておこう．

$$S = S^{d-1} = \{x \in \mathbf{R}^d : |x| = 1\}$$

とおく．このとき，S 上の点 x は極座標を使って

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta_1, \\ x_2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2} \cos\theta_{d-1}, \\ x_d &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2} \sin\theta_{d-1} \\ &\qquad (\theta_j \in [0, \pi]\ (j = 1, \ldots, d-2),\ \theta_{d-1} \in [0, 2\pi)) \end{aligned}$$

と表すことができる．この座標を使って球面 S の表面積を計算すると次のようになることは，微分積分で学んだであろう:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2}\, d\theta_{d-1} \cdots d\theta_1 \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \end{aligned}$$

ただし Γ はガンマ関数である．記号を簡略化するため，上記の極座標のもとで S 上の面積測度は，

$$d\sigma(x) = \frac{1}{\sigma_d} \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2}\, d\theta_1 \cdots d\theta_{d-1}$$

と表すことができる．そして，S 上の関数 f に対して，

$$\int_S f(x)\, d\sigma(x) = \frac{1}{\sigma_d} \int f \sin^{d-2}\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-2}\, d\theta_1 \cdots \theta_{d-1} \tag{7.4}$$

により S 上の積分を定義する (これは S 上での f の面積積分を S の面積で割ったものになっている)．もちろん，このような積分はすべての関数に対して定義できるわけではない．本書では (7.4) の右辺の積分を書いたときには，暗黙のう

ちに f として積分が定義できるような関数を考えているものとする[3]．そして，

$$\|f\|_{L^2(\sigma)} = \left(\int_S |f(x)|^2 \, d\sigma(x)\right)^{1/2} < \infty \tag{7.5}$$

なる関数全体のなす集合を $L^2(S,\sigma)$, あるいは混乱のないときは単に $L^2(\sigma)$ と表すことにする．$L^2(\sigma)$ は

$$(f,g)_S = \int_S f(x)\overline{g(x)} \, d\sigma(x) \qquad (f, g \in L^2(\sigma))$$

を内積とするヒルベルト空間になっている (定理 6.4).

さて，これらの記号を使って，フーリエ級数を関数論的な視点で見直してみよう．

7.2.1 関数論的にみたフーリエ級数

$\mathbf{R}^2$ の点 (x_1, x_2) と $x_1 + ix_2$ $(\in \mathbf{C})$ を対応させることにより，以下では $\mathbf{R}^2$ を複素平面 $\mathbf{C}$ と考えることにする．このとき，$f \in L^2(S^1, \sigma)$ に対して $\widetilde{f}(t) = f(e^{it})$ とすると，$\widetilde{f}$ は t の関数として周期 2π をもち，$\widetilde{f} \in L^2(-\pi, \pi)$ となる．したがって，すでに学んだフーリエ級数論より，L^2 ノルムに関する収束の意味で

$$f(e^{it}) = \widetilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\widetilde{f})e^{ikt}$$

となる．いま，$z = e^{it}$ とおくと $e^{-it} = \overline{z}$ であるから，

$$f(z) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k(\widetilde{f})z^k + c_{-k}(\widetilde{f})\overline{z}^k\right) \tag{7.6}$$

と表すことができる．ここで $c_k(\widetilde{f})z^k + c_{-k}(\widetilde{f})\overline{z}^k$ は k 次の斉次多項式である．そこで z を形式的に任意の複素数と考えることによって，自然に全平面上で定義された k 次斉次多項式に拡張できる．すると，この多項式 $c_k(\widetilde{f})z^k + c_{-k}(\widetilde{f})\overline{z}^k$ は以下に定義する調和関数になっていることが証明できる (証明は命題 7.6 参照).

定義 7.2 (ラプラス作用素と調和関数) $\mathbf{R}^d$ の開集合 Ω 上の C^2 関数 f が Ω 上の**調和関数**であるとは，$\mathbf{R}^d$ のラプラス作用素 Δ ((3.9) 参照) に対して，

$$\Delta f(x) = 0 \qquad (x \in \Omega)$$

[3] 正確には，f は極座標変換の後，$[0,\pi]^{d-2} \times [0, 2\pi]$ 上のルベーグ可測関数であって，(7.4) の右辺の積分――ルベーグ積分――が定義できることを仮定する．

を満たすことである.

命題 7.6 $c_k(f)z^k + c_{-k}(f)\overline{z}^k$ は $\mathbf{C}$ 上の調和関数である.

証明 $\mathbf{R}^2$ の場合,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

とおくと

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \overline{z} \partial z} \tag{7.7}$$

となっていることに注意しておく. 開集合 $\Omega \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ 上の C^1 関数 g が Ω 上で正則であることと, コーシー・リーマンの方程式を満たすことは同値であり, しかも簡単な計算で, g がコーシー・リーマンの方程式を満たすことと

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} g = 0$$

を満たすことが同値であることがわかる. したがって, g が正則ならば, (7.7) により g と $\overline{g}$ が調和関数になることがわかる. よって命題が証明された. □

いままでのことをまとめると, フーリエ級数展開とは, S^1 上の関数を $\mathbf{R}^2$ 上の調和な k 次斉次多項式 Y_k で

$$f = c + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k$$

と展開するということになる. ここで c は複素数である. このような視点から S^1 上のフーリエ級数を S^{d-1} に高次元化したものが, これから学ぶ球面調和関数による展開である.

7.2.2 球面調和関数と球面上のラプラス作用素

まず, k 次の球面調和関数の定義からはじめる. $\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d)$ を $\mathbf{R}^d$ 上の複素係数の k 次斉次多項式の全体を表すことにする. すなわち,

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d) = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha \ : \ a_\alpha \in \mathbf{C},\ |\alpha| = k \right\}$$

である. さらに, この多項式のうち調和なものを考える:

$$\mathcal{H}\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d) = \left\{ P \in \mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d) \ : \ \Delta P(x) = 0,\ x \in \mathbf{R}^d \right\}.$$

このとき, 球面調和関数は次のように定義される.

定義 7.3 $P \in \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d)$ を球面 S 上に制限した関数を S 上の k 次球面調和関数という．すなわち，S 上の関数 H が S 上の k 次球面調和関数であるとは，ある $P \in \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d)$ が存在して

$$H(x) = P(x) \qquad (x \in S)$$

となるような関数のことである．S 上の k 次球面調和関数全体からなる集合を $\mathcal{H}_k(S)$ で表す．

混乱のおそれのない限り，

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d), \qquad \mathcal{HP}_k = \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d), \qquad \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k(S)$$

と表すことにする．

本節の目標は次の定理を証明することである．

定理 7.7 (1) $\dim \mathcal{H}_k = \binom{d+k-1}{k} - \binom{d+k-3}{k-2} \quad (k = 2, 3, \ldots),$

$$\dim \mathcal{H}_0 = 1, \qquad \dim \mathcal{H}_1 = d.$$

(2) $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$, $Y^{(\ell)} \in \mathcal{H}_\ell$ $(k \neq \ell)$ のとき，

$$(Y^{(k)}, Y^{(\ell)})_S = \int_S Y^{(k)}(x)\overline{Y^{(\ell)}(x)}\, d\sigma(x) = 0.$$

(3) $Y_j^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ $(j = 1, \ldots, h(d,k);\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ を $\mathcal{H}_k$ の正規直交基底とする．ただしここで $h(d,k) = \dim \mathcal{H}_k$ である．このとき $f \in L^2(S, \sigma)$ に対して，

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{h(d,k)} (f, Y_j^{(k)})_S Y_j^{(k)} \right\|_{L^2(\sigma)} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

定理の証明のまえに，いくつかの予備的事項を証明しておきたい．

補題 7.8 $\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d)$ は $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間で，その次元は

$$d_k = \binom{d+k-1}{d-1} = \binom{d+k-1}{k} = \frac{(d+k-1)!}{(d-1)!k!}$$

である．

証明 定義より，$\mathcal{P}_k$ は $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ $(|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = k)$ で生成される $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間で，各 x^α は一次独立であるから，$\mathcal{P}_k$ の次元は $|\alpha| = k$ なる多重指

数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ の個数であり，それが d_k である． □

さて，$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha$ に対して x^α のところに形式的に ∂^α を代入してつくった偏微分作用素

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \partial^\alpha$$

を考える．$P, Q \in \mathcal{P}_k$ に対して

$$(P, Q)_p = P(\partial)\overline{Q} \tag{7.8}$$

とする．このとき，次が成り立つ．

補題 7.9 $(\ ,\ )_p$ は $\mathcal{P}_k$ 上の内積になっている．

証明 $P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha$, $Q(x) = \sum_{|\beta|=k} b_\beta x^\beta$ であるとすると

$$(P, Q)_p = P(\partial)\bar{Q} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \partial^\alpha \sum_{|\beta|=k} \bar{b}_\beta x^\beta = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! a_\alpha \bar{b}_\alpha$$

となっている．この式から $(P, Q)_p \in \mathbf{C}$ であり，さらに内積の公理をすべて満たすことが容易にわかる． □

一般には，$\mathrm{span}\left(\bigcup_k \mathcal{HP}_k\right)$ が多項式全体を生成していることはまったく期待できない．実際，調和でない多項式はいくらでも存在する．ところが，球面上では $\mathrm{span}\left(\bigcup_k \mathcal{H}_k\right)$ が多項式全体を生成していることがわかる．このことが，定理 7.7 の主張 (3) の証明の土台になる部分である．

じつは，そのからくりは次の補題に集約されている．

補題 7.10 $P \in \mathcal{P}_k$ とすると，ある $P_j \in \mathcal{HP}_{k-2j}$ $(j = 0, \ldots, \ell;\ \ \ell$ は $k - 2\ell \geqq 0$ となる最大の整数) が存在し，

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + \cdots + |x|^{2\ell} P_\ell(x)$$

と書くことができる．

証明 $j = 2, 3, \ldots$ に対して $|x|^2 \mathcal{P}_{j-2} = \{|x|^2 Q : Q \in \mathcal{P}_{j-2}\}$ とおく．このとき，内積 $(\cdot, \cdot)_p$ に関して，

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{HP}_j \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{j-2} \tag{7.9}$$

と直交分解できていることを証明する．それには，内積 $(\ ,\ )_p$ に関する $|x|^2\mathcal{P}_{j-2}$ の直

交補空間

$$(|x|^2\mathcal{P}_{j-2})^\perp = \left\{P \in \mathcal{P}_j : (|x|^2 Q, P)_p = 0\ (\forall Q \in \mathcal{P}_{j-2})\right\}$$

が $\mathcal{HP}_j$ と一致することを示せば十分である (定理 6.7 による). $P \in \mathcal{HP}_j$ とすると, 任意の $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$ に対して

$$(|x|^2 Q, P)_p = \Delta Q(\partial)\overline{P} = Q(\partial)\overline{\Delta P} = 0$$

であるから, $\mathcal{HP}_j \subset (|x|^2\mathcal{P}_{j-2})^\perp$ がわかる. 逆に $P \in (|x|^2\mathcal{P}_{j-2})^\perp$ とすると, 任意の $Q \in \mathcal{P}_{j-2}$ に対して

$$(Q, \Delta P)_p = Q(\partial)\Delta\overline{P} = \Delta Q(\partial)\overline{P} = (|x|^2 Q, P)_p = 0$$

がわかる. ここで, $\Delta P \in \mathcal{P}_{j-2}$ であるから $\Delta P = 0$ でなければならない. ゆえに $(|x|^2\mathcal{P}_{j-2})^\perp \subset \mathcal{HP}_j$ である.

直交分解 (7.9) を使うと, 補題が次のように証明できる. $P \in \mathcal{P}_k$ をとる. $k = 0, 1$ のときは P 自身が調和関数になっている. $k \geqq 2$ の場合を示す. まず $j = k$ として (7.9) を適用すると, ある $P_0 \in \mathcal{HP}_k$ と $Q_1 \in \mathcal{P}_{k-2}$ により

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 Q_1(x)$$

と書けることがわかる. $k-2 \leqq 1$ ならば補題の証明が終わる. $k-2 \geqq 2$ であるときは, $j = k-2$ として (7.9) を使えば, ある $P_1 \in \mathcal{HP}_{k-2}$ とある $Q_2 \in \mathcal{P}_{k-4}$ によって $Q_1 = P_1 + |x|^2 Q_2$ と書けるので,

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + |x|^4 Q_2(x)$$

となる. 以下, この操作を繰り返せば補題の証明が完了する. □

この補題から, 任意の k 次斉次多項式 P は, 球面 S 上では

$$P(x) = P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_\ell(x) \qquad (x \in S) \tag{7.10}$$

と球面調和関数の和で表せることがわかる. したがって, 任意の多項式も S 上に制限すれば, 球面調和関数の一次結合で表せることになる. このことから, 次の補題がわかる.

補題 7.11 S 上の連続関数 f に対して, ある $f_n \in \operatorname{span}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(S)\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で

$$\|f - f_n\|_S = \sup_{x \in S} |f(x) - f_n(x)| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となるものが存在する.

証明 $\mathbf{R}^d$ 上の複素係数の多項式全体からなる集合を $\mathcal{P}$ とする. また, S 上の関数 g

で，ある $P \in \mathcal{P}$ によって $g(x) = P(x)$ $(x \in S)$ となるもの全体のなす集合を A とする．このとき，A はストーン・ワイエルシュトラスの定理 (定理 A.10) の条件を満たすことが容易に確認できるので，任意の $f \in C(S)$ に対して $\|f - g_n\|_S \to 0$ $(n \to \infty)$ なる $g_n \in A$ が存在する．すでに示したように，各 g_n は球面調和関数の一次結合で表せているので，補題の証明ができる． □

$\mathcal{H}_k$ の次元を計算しておこう．(7.9) により，

$$\dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{HP}_k + \dim \mathcal{P}_{k-2}$$

である．一方，$P \in \mathcal{HP}_k$ を S 上に制限した関数に対応させる写像を φ_k とおく．φ_k は $\mathcal{HP}_k$ から $\mathcal{H}_k$ の上への線形写像である．この写像が 1 対 1 写像であることを示す．そのためには，$\varphi_k(Y) = 0$ のとき，$Y = 0$ であることを証明すればよい．Y が k 次斉次であることより，任意の $x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ に対して

$$Y(x) = |x|^k Y\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^k \varphi_k(Y)\left(\frac{x}{|x|}\right) = 0$$

がわかる．ゆえに $Y = 0$ でなければならない．したがって，φ_k は $\mathcal{HP}_k$ から $\mathcal{H}_k$ への同形写像となり，線形代数の一般論から $\mathcal{HP}_k$ の次元と $\mathcal{H}_k$ の次元が一致することが得られる．以上のことから，

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{H}_k(S^{d-1}) &= \dim \mathcal{HP}_k(\mathbf{R}^d) \\ &= \dim \mathcal{P}_k(\mathbf{R}^d) - \dim \mathcal{P}_{k-2}(\mathbf{R}^d) \\ &= \binom{d+k-1}{k} - \binom{d+k-3}{k-2} =: h(d,k) \qquad (7.11)\end{aligned}$$

がわかる．

なおこれより，$k \geqq 2$ のとき，$d = 2$ の場合は $\dim \mathcal{H}_k = 2$ となり，$d = 3$ の場合は $\dim \mathcal{H}_k = 2k + 1$ となることが容易に計算できる．

定理 7.7 の証明にとりかかろう．

定理 7.7 の証明　(1) はすでに示した．

(2) を証明する．$Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k, Y^{(\ell)} \in \mathcal{H}_\ell$ とする．上で定義した $\mathcal{HP}_k$ から $\mathcal{H}_k$ の上への同形写像 φ_k を使って，$u = \varphi_k^{-1}(Y^{(k)})$ を定義する．同様にして $v = \varphi_\ell(Y^{(\ell)})$ とおく．$x = rx'$ $(r \in (0,\infty), x' \in S)$ と極座標で表すと

$$u(x) = r^k Y^{(k)}(x'), \qquad v(x) = r^\ell Y^{(\ell)}(x')$$

となっている．定義より u, v は調和であるから $\Delta u = \Delta v = 0$ であり，また $x \in S$ では

$$\frac{\partial u}{\partial r} = kY^{(k)}(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \ell Y^{(\ell)}(x)$$

となっている．したがって，グリーンの公式より次の式が得られる：

$$0=\int_{\{x\in\mathbf{R}^d:\,|x|\leqq 1\}}(u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\sigma_d\int_S\left(u\frac{\partial v}{\partial r}-v\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\sigma(x)$$

$$=\sigma_d\int_S\left(\ell Y^{(k)}Y^{(\ell)}-kY^{(\ell)}Y^{(k)}\right)d\sigma(x)=\sigma_d(\ell-k)\int_S Y^{(k)}Y^{(\ell)}d\sigma(x).$$

したがって (2) は証明された．

次に (3) の主張を証明する．$\mathcal{H}_k$ は $h(d,k)$ 次元ベクトル空間であるから，$Y_1^{(k)},\ldots,Y_{h(d,k)}^{(k)}$ という $\mathcal{H}_k$ の内積 $(\ ,\ )_{L^2(\sigma)}$ に関する正規直交基底をとることができる．(2) より

$$\{Y_j^{(k)}:k=0,1,2,\ldots;\ j=1,\ldots,h(d,k)\}\tag{7.12}$$

が正規直交系であることがわかる．また，任意の $f\in L^2(S,\sigma)$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，ルベーグ積分の一般論から $\|f-g\|_{L^2(\sigma)}<\varepsilon/2$ を満たす S 上の連続関数 g が存在する．さらに，補題 7.11 により，ある $h\in\operatorname{span}\left(\bigcup_k\mathcal{H}_k\right)$ で

$$\|g-h\|_{L^2(\sigma)}\leqq\|f-h\|_S<\frac{\varepsilon}{2}$$

となるものが存在する．ゆえに $\operatorname{span}\left(\bigcup_k\mathcal{H}_k\right)$ が $L^2(S,\sigma)$ で稠密であることがわかった．よって定理 6.5 より，(3) が証明された． □

次に，球面調和関数が，球面上のラプラス作用素とよばれる作用素 Δ_S の固有関数になっていることを証明しよう．Δ_S は極座標で表せば，

$$\Delta_S=\sum_{k=1}^{d-2}\frac{1}{(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{k-1})^2\sin^{d-1-k}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\left(\sin^{d-1-k}\theta_k\frac{\partial u}{\partial\theta_k}\right)$$

$$+\frac{1}{(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{d-2})^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta_{d-1}^2}\tag{7.13}$$

となっている．この偏微分作用素は幾何学的に重要なもので，$\mathbf{R}^d$ のユークリッド計量から誘導される球面上のリーマン計量に関するラプラス・ベルトラミ作用素である．また，ラプラス作用素に関連した偏微分方程式を変数分離法で解こうとするとき，Δ_S が現れる．実際，$\mathbf{R}^d$ のラプラス作用素 Δ を極座標を使って書き表すと

$$\Delta u=\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_S u\tag{7.14}$$

となることが，計算により得られる．

定理 7.12 $Y_1^{(\ell)}, \dots, Y_{h(d,\ell)}^{(\ell)}$ を (7.12) の ℓ 次球面調和関数とする．このとき $\{Y_j^{(\ell)} : \ell = 0, 1, 2, \dots;\ j = 1, \dots, h(d, \ell)\}$ は $L^2(S^{d-1}, \sigma)$ の正規直交基底で，さらに次式を満たす:

$$\Delta_S Y_j^{(\ell)} = -\ell(d + \ell - 2) Y_j^{(\ell)}.$$

証明 ℓ 次の球面調和関数に対して，$r^\ell Y^{(\ell)}(x')$ は $\mathbf{R}^d$ 上の調和関数であるから，

$$0 = \Delta r^\ell Y^{(\ell)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (d-1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S \right) r^\ell Y^{(\ell)}$$

である．したがって，S 上では

$$\ell(\ell-1)Y^{(\ell)} + (d-1)\ell Y^{(\ell)} + \Delta_S Y^{(\ell)} = 0$$

を満たしている．これより，定理が得られる． □

なお，関数 $f \in L^2(\sigma)$ が十分滑らかであれば，f の球面調和関数による展開

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{h(d,k)} (f, Y_j^{(k)})_S Y_j^{(k)}$$

は一様収束し，しかも球面上の微分に関して項別微分できるなどの性質をもつ．その証明は巻末補足 (A.5 節) で述べる．

以下では，球面調和関数の具体的な形を $d = 3$ の場合について述べる (一般の場合は，**ゲーゲンバウアー多項式**とよばれるものを使って記述される)．

便宜上，今度は $x = (x_1, x_2, x_3)$ を

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta\cos\phi, \quad x_3 = r\sin\theta\sin\phi$$
$$(\theta \in (0, \pi),\ \phi \in (0, 2\pi))$$

と表す．

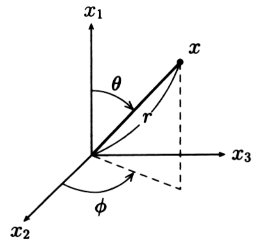


図 7.3 $\mathbf{R}^3$ 極座標．r を動径方向の長さ，θ を天頂角，ϕ を方位角という．

ここで Δ_S は，r, θ, ϕ を使って表すと次のように書くことができる:

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

まず，$\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ の形の関数で次を満たすものを探し出す:

$$\begin{aligned}0 &= (\Delta_S + \ell(\ell+1))\Theta(\theta)\Phi(\phi)\\ &= \frac{\Phi(\phi)}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \ell(\ell+1)\Theta(\theta)\Phi(\phi).\end{aligned}$$

この関係式を変形すると

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\frac{1}{\Theta} + \ell(\ell+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

ここで両辺は定数でなければならないので，それを仮に m^2 とおく．すると，

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2\Phi(\phi) = 0, \tag{7.15}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0. \tag{7.16}$$

(7.15) の解は $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ を満たしているので，m は整数で $\Phi_m(\phi)$ は $e^{im\phi}$ と $e^{-im\phi}$ の一次結合でなければならない．一方，$t = \cos\theta$ と変数変換し $P^m(t) = \Theta(\theta)$ とおくと，t は -1 から 1 を動く変数として，(7.16) は

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dP^m}{dt}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)P^m(t) = 0 \tag{7.17}$$

と変形される (これは，ちょうど $m = 0$ の場合がルジャンドル多項式 $P_\ell(t)$ の満たす微分方程式である)．さて，$|m| \leqq \ell$ のとき，

$$P_\ell^m(t) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{\ell+m}}{dt^{\ell+m}}(t^2-1)^\ell \tag{7.18}$$

は (7.17) を満たしている (各自試みよ)．この $P_\ell^m(t)$ を**ルジャンドル陪関数**という．また，$\delta_{\ell k}$ をクロネッカーのデルタとして

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(t)P_k^m(t)\,dt = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell k}$$

となる．

そこで，$\ell = 0, 1, 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, 2\ell+1;\ m = j-\ell-1$ とし，α_k を $|\alpha_k| = 1$ なる複素数として次のようにおく:

$$
\begin{aligned}
Y_j^{(\ell)}(x') &= Y_j^{(\ell)}(\theta, \phi) \\
&= \alpha_k \sqrt{(2\ell+1)\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}.
\end{aligned} \tag{7.19}
$$

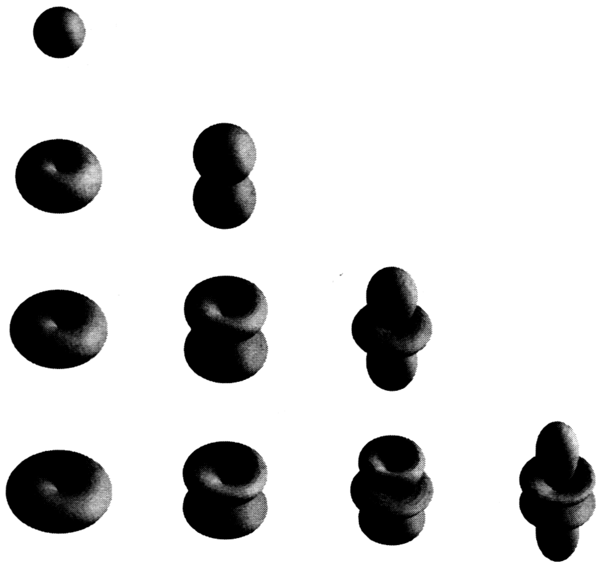


図 7.4　θ, ϕ を変数とした (7.19) の 2 乗のグラフ．上から $\ell = 0, 1, 2, 3$，左から $m = -\ell, \ldots, 0$.

このとき，

$$\Delta_S Y_j^{(\ell)} = -\ell(\ell+1) Y_j^{(\ell)}$$

を満たし，かつ

$$\int_S Y_j^{(\ell)}(x') Y_{j'}^{(\ell')}(x')\, d\sigma(x') = \delta_{\ell\ell'}\delta_{jj'}$$

であることが証明できる．ここで，$\sigma(S) = 1$ と正規化してあったことを思い出してもらいたい．また S 上では

$$x_1 = \cos\theta, \qquad (x_2 \pm ix_3)^m = (\sin^m\theta) e^{\pm im\phi}$$

となっていることより，$r^\ell Y_j^{(\ell)}(x')$ は多項式であることがわかる ((7.18) をみよ)．しかも調和になっている．ゆえに，$Y_j^{(\ell)}$ が $\mathcal{H}_\ell$ の正規直交基底をなす球

面調和関数になっている.

7.3 ウェーブレット

近年，ウェーブレットとよばれる基底が科学・技術で広く利用されるようになってきた．本節ではウェーブレットのなかでも正規直交ウェーブレットとよばれるものと，ウェーブレット理論で重要な役割を果たす多重解像度解析について述べる．

正規直交ウェーブレットとは，大まかにいえば $\mathbf{R}$ 上のある有限区間上でのみ大きく波打ち，一方，遠方では 0 になるか，あるいは無限遠で 0 に収束するような関数 ψ で，

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \qquad (j, k \in \mathbf{Z})$$

としたとき，$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底になるようなものである．ただし数学的な枠組みとしては $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ であり，$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底になるようなものが**正規直交ウェーブレット**と定義される．

正規直交ウェーブレットの簡単な例として，**ハール・ウェーブレット**がある．これは次のような関数である:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [0, \frac{1}{2})) \\ -1 & (x \in [\frac{1}{2}, 1)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

このとき，$\psi_{j,k}(x)$ の $j = 0, 1, 2;\ k = 0$ の場合のグラフは図 7.5 のようになる．このグラフからもわかるように，$\psi = \psi_{0,0}$ は有界区間 $[0, 1)$ 上でのみ変化し，それ以外のところでは 0 になっている．これに対してフーリエ級数，フーリエ変換で用いた関数系は $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ であるが，これは $\mathbf{R}$ のいたるところで変化している．この違いから，ウェーブレットはフーリエ級数，フーリエ変換にはない良い性質をもっている．本節では，ハール・ウェーブレットを軸に，ウェーブレットとはどのようなものか，そして多重解像度解析の定義とその意義を述べる．なお，ハール・ウェーブレットはウェーブレットが現れるはるか以前の 1910 年に A. Haar により発見されており，ハール基底とよばれていた．

本節をとおして，記号の簡略化のため，$\|f\|_2 = \|f\|_{L^2(\mathbf{R})}$ と記し，$L^2(\mathbf{R})$ の

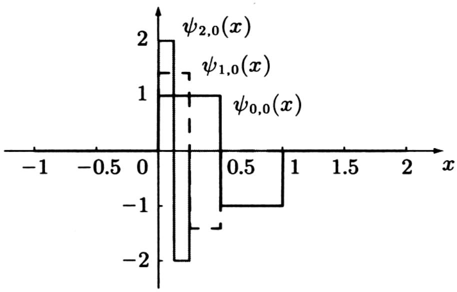


図 7.5 ハール・ウェーブレットのグラフ $(\psi_{0,0}, \psi_{1,0}, \psi_{2,0})$.

内積 $(f,g)_{L^2(\mathbf{R})}$ を (f,g) と略記する．また，$\mathbf{R}$ のルベーグ可測集合 A に対して $|A|$ により A の 1 次元ルベーグ測度を表すことにする．

7.3.1 ハール・ウェーブレット

まず 2 進区間を導入する．$j,\ k \in \mathbf{Z}$ に対して

$$I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)$$

とおき，

$$\mathcal{C}_j = \{I_{j,k} \,:\, k \in \mathbf{Z}\}, \qquad \mathcal{C} = \bigcup_{j \in \mathbf{Z}} \mathcal{C}_j$$

とおく．$\mathcal{C}_j$ に属する区間を**レベル** j **の 2 進区間**といい，$\mathcal{C}$ に属する区間を **2 進区間**という．

$$\begin{aligned} I_{j,k} &= \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right) = \left[\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}}\right) \\ &= I_{j+1,2k} \cup I_{j+1,2k+1} \end{aligned}$$

が成り立っている．$I_{j+1,2k}$ は $I_{j,k}$ の左半分であり，$I_{j+1,2k+1}$ は $I_{j,k}$ の右半分である．そこで

$$I_{j+1,2k} = I^-_{j,k}, \qquad I_{j+1,2k+1} = I^+_{j,k}$$

とおく．

この 2 進区間を使ってハール基底を構成する．集合 E に対して

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E) \end{cases}$$

とする.

定義 7.4 $j,k\in\mathbf{Z}$ に対して,

$$\varphi(x)=\chi_{[0,1)}(x)\quad\bigl(=\chi_{I_{0,0}}(x)\bigr),$$

$$\psi(x)=\chi_{[0,1/2)}(x)-\chi_{[1/2,1)}(x)\quad\bigl(=\chi_{I_{1,0}}(x)-\chi_{I_{1,1}}(x)\bigr)$$

とする. このとき, $\varphi(x)$ を**ハール・スケーリング関数**といい, $\psi(x)$ を**ハール関数**という.

あとで詳しく述べるが, ウェーブレット理論ではスケーリング関数が重要な役割を果たす. さて, 一般に $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ と $j,k\in\mathbf{Z}$ に対して

$$f_{j,k}(x)=2^{j/2}f(2^jx-k)\quad\Bigl(=2^{j/2}f(2^j(x-2^{-j}k))\Bigr)\tag{7.20}$$

とする. 簡単な変数変換から,

$$\|f_{j,k}\|_{L^2(\mathbf{R})}=\|f\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

であることがわかる. この変換により関数 $f(x)$ は 2 進的に圧縮・伸張され ($j>0$ ならば圧縮, $j<0$ ならば伸張), $2^{-j}k$ の平行移動がされている. この操作はウェーブレット理論では重要なものである. この圧縮・伸張, 平行移動により, そのフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_{j,k}](\xi)&=\int_{\mathbf{R}}2^{j/2}f(2^jx-k)e^{-ix\xi}\,dx\\&=2^{-j/2}e^{-i2^{-j}k\xi}\int_{\mathbf{R}}f(y)e^{-i2^{-j}y\xi}\,dy\\&=2^{-j/2}e^{-i2^{-j}k\xi}\mathcal{F}[f](2^{-j}\xi)\\&=e^{-i2^{-j}k\xi}\mathcal{F}[f]_{-j,0}(\xi)\end{aligned}$$

と変化している.

いま, ハール・スケーリング関数とハール関数に対して, $\varphi_{j,k}(x)$ と $\psi_{j,k}(x)$ を考えると,

$$\varphi_{j,k}(x)=2^{j/2}\chi_{I_{j,k}}(x),$$

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}(\chi_{I_{j+1,2k}}(x)-\chi_{I_{j+1,2k+1}}(x))$$

となっている.

これから先, ハール関数が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底になることを証明する. こ

こでの証明は，多重解像度解析の基本的な考え方を踏襲しているので，あとに定義される多重解像度解析のアイデアの萌芽をみることができるであろう．

はじめに次のことを示す．

命題 7.13 $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交系である．また $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ も $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交系である．J を整数とする．このとき $\{\varphi_{J,k},\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z},j\geqq J}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交系である．

証明 前半の主張は φ と $\varphi_{j,k}$ の定義から明らかであるので，後半の主張を証明する．$\|\psi_{j,k}\|_2=\|\psi\|_2=1$ である．

$$\int_{\mathbf{R}}\psi_{j,k}(x)\,dx=2^{-j/2}\int_{\mathbf{R}}\psi(x)\,dx=0$$

であることに注意しておく．さて，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}\psi(x)\psi_{j,k}(x)\,dx&=\int\left(\chi_{I_{1,0}}(x)-\chi_{I_{1,1}}(x)\right)\left(\chi_{I_{j+1,2k}}(x)-\chi_{I_{j+1,2k+1}}(x)\right)dx\\&=\int_{I_{1,0}}\left(\chi_{I^-_{j,k}}(x)-\chi_{I^+_{j,k}}(x)\right)dx-\int_{I_{1,1}}\left(\chi_{I^-_{j,k}}(x)-\chi_{I^+_{j,k}}(x)\right)dx.\end{aligned}$$

$j>0$ のときは，$I^-_{j,k}\cup I^+_{j,k}=I_{j,k}\subset I_{1,0}$ または $(I^-_{j,k}\cup I^+_{j,k})\cap I_{1,0}=\emptyset$ のいずれかであるから，

$$\int_{I_{1,0}}\left(\chi_{I^-_{j,k}}(x)-\chi_{I^+_{j,k}}(x)\right)dx=0$$

である．同様にして

$$\int_{I_{1,1}}\left(\chi_{I^-_{j,k}}(x)-\chi_{I^+_{j,k}}(x)\right)dx=0$$

である．したがって，$j>0$ の場合，

$$\int_{\mathbf{R}}\psi(x)\psi_{j,k}(x)\,dx=0$$

を得る．

以上より，$j'>j$ の場合，$y=2^jx-k$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x)\,dx&=2^{(j'-j)/2}\int_{\mathbf{R}}\psi(y)\psi(2^{j'}(2^{-j}(y+k))-k')\,dx\\&=2^{(j'-j)/2}\int_{\mathbf{R}}\psi(y)\psi(2^{j'-j}y+2^{j'-j}k-k')\,dx=0\end{aligned}$$

である．また $j'<j$ の場合は $y=2^{j'}x-k'$ と変数変換すれば，同様の等式を得られる．$j=j'$ の場合は，明らかに

$$\int_{\mathbf{R}}\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x)\,dx=\int_{\mathbf{R}}\psi(y)\psi(y+k-k')\,dx=\delta_{k,k'}$$

(ここで $\delta_{k,l}$ はクロネッカーのデルタ記号) である.

最後に $j \geqq J$ ならば $\mathrm{supp}(\psi_{j,k'}) \cap I_{J,k} = \emptyset$ か $\mathrm{supp}(\psi_{j,k'}) \subset I_{J,k}$ である. $\mathrm{supp}(\psi_{j,k'}) \subset I_{J,k}$ の場合,

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_{J,k}(x)\psi_{j,k'}(x)\,dx = \int_{I_{J,k}} \varphi_{J,k}(x)\psi_{j,k'}(x)\,dx$$
$$= \int_{I_{J,k}} \psi_{j,k'}(x)\,dx = 0$$

である. $\mathrm{supp}(\psi_{j,k'}) \cap I_{J,k} = \emptyset$ の場合は, 左辺の積分が 0 になることは明らかである. 以上で命題が証明された. □

以下では, ハール関数が正規直交ウェーブレットであることを証明するためのいくつかの準備的な考察をする. すでに正規直交系であることは示したので, $\mathrm{span}(\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}})$ が $L^2(\mathbf{R})$ で L^2 ノルムに関して稠密であることをいえばよい. これを証明するための準備からはじめる.

定義 7.5 $j \in \mathbf{Z}$ とする. ある有限個あるいは可算個の 2 進区間 $I_{j,k(1)}, I_{j,k(2)}, \cdots$ と複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ によって $\sum_{l=1,2,\cdots} \alpha_l \chi_{I_{j,k(l)}}(x)$ と表される関数を**レベル j の階段関数**という[4].

以下, 本節では $A \cap B = \emptyset$ のとき, $A \cup B$ のことを $A \dot{+} B$ と表すことにする. $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = \cdots \dot{+} I_{j,k} \dot{+} I_{j,k+1} \dot{+} \cdots$$

のように可算個の部分に分割される. そこで関数 $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ [5] に対して, 各部分区間 $I_{j,k}$ 上で f の平均

$$\frac{1}{|I_{j,k}|}\int_{I_{j,k}} f(t)\,dt$$

を考え, $I_{j,k}$ 上では恒等的に $I_{j,k}$ 上での f の平均をとるような関数を $P_j f$ とおく. すなわち,

$$P_j f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|}\int_{I_{j,k}} f(t)\,dt\right)\chi_{I_{j,k}}(x)$$

である. この $P_j f$ はレベル j の階段関数になっている. $f \in L^2(\mathbf{R})$ の場合に

---

[4] これは便宜上定めた定義で, 一般的な呼称ではない.

[5] $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可測関数で, 任意のコンパクト集合上で可積分になっているようなもの全体を表す.

は次のようにも表せることが容易に確かめられる:

$$P_j f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f, \varphi_{j,k})\varphi_{j,k}(x). \qquad (7.21)$$

(なお $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ の場合でも，$(f, \varphi_{j,k})$ を $L^2(\mathbf{R})$ の内積ではなく，$f\varphi_{j,k}$ の $\mathbf{R}$ 上の積分と考えれば，(7.21) は成立する．)

ここで $\varphi_{j,k}$ が正規直交系であるから，ベッセルの不等式から

$$\|P_j f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |(f, \varphi_{j,k})|^2 \leqq \|f\|_2^2$$

が成り立っている．

$f(x)$ に比べ，$P_j f(x)$ は粗いグラフをもっている．しかし分割を細かくすれば，すなわち十分大きな j に対しては $P_j f(x)$ はほとんど見た目には $f(x)$ と区別できなくなる．これはディジタル画像が細かいチェック模様ではなく，自然な画像として認識できることからも理解できるであろう．数学的には次のことが成り立つ．

定理 7.14 任意の $f \in C_0(\mathbf{R})$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |P_j f(x) - f(x)| = 0,$$

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$$

が成り立つ．また，任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対して

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$$

が成り立つ．

証明 まず，次のように式変形する:

$$\begin{aligned} f(x) - P_j f(x) &= f(x) - \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(t)\,dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(f(x) - \frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(t)\,dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} (f(x) - f(t))\,dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x). \end{aligned}$$

$f \in C_0(\mathbf{R})$ とする．このとき，十分大きな自然数 N をとって $\mathrm{supp}(f) \subset [-N, N]$ とできる．f は一様連続であるから，十分大きな自然数 J をとって，$|x - y| < 2^{-J}$ な

らば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/(2N)^{1/2}$ とできる．したがって $j \geqq J$ であれば，任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$|f(x)-P_jf(x)| \leqq \sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{|I_{j,k}|}\int_{I_{j,k}}|f(x)-f(t)|\,dt\right)\chi_{I_{j,k}}(x)$$
$$\leqq \varepsilon/(2N)^{1/2}<\varepsilon$$

が成り立っている．ゆえに $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}|P_jf(x)-f(x)|=0$ が成り立つ．また，定義より $\mathrm{supp}(P_jf)\subset[-N,N)$ であるから，$j \geqq J$ ならば

$$\|f-P_jf\|_2=\left(\int_{-N}^{N}|f(x)-P_jf(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\leqq\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\left(\int_{-N}^{N}dx\right)^{1/2}=\varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\|f-P_jf\|_2=0$ も成り立つ

$f\in L^2(\mathbf{R})$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $g\in C_0(\mathbf{R})$ で，$\|f-g\|_2<\varepsilon$ なるものが存在する (定理 1.28 参照)．前半の主張より，十分大きな J をとって，$j \geqq J$ に対して，$\|g-P_jg\|_2<\varepsilon$ とできる．ゆえに

$$\|f-P_jf\|_2\leqq\|f-g\|_2+\|g-P_jg\|_2+\|P_j(g-f)\|_2$$
$$\leqq\varepsilon+\varepsilon+\|g-f\|_2<3\varepsilon.$$

□

さて，$P_{j+1}f$ は f のひとつの近似であるが，これを粗くしたものが P_jf である．比喩的ないい方ではあるが，$P_{j+1}f$ のほうが P_jf よりも良い解像度をもっているということである．その一方で，厳密ないい方ではないが，P_jf のほうがより大きな範囲での平均化をしているため，$P_{j+1}f$ よりは少ない情報で記述されている．これは，解像度の低い画像のほうが少ないデータ量で実現できることに対応している．そこで生じる誤差は

$$Q_jf=P_{j+1}f-P_jf$$

である．この Q_jf は次のように表せている．

命題 7.15 $f\in L^2(\mathbf{R})$ に対して

$$Q_jf=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f,\psi_{j,k})\psi_{j,k}$$

である．

証明 $x\in I_{j,k}$ とし，

$$a=2^{j+1}\int_{I_{j,k}^-}f(t)\,dt,\qquad b=2^{j+1}\int_{I_{j,k}^+}f(t)\,dt,\qquad c=2^j\int_{I_{j,k}}f(t)\,dt$$

とおく．このとき $c=(a+b)/2$ である．$x \in I_{j,k}$ より

$$P_{j+1}f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{|I_{j+1,n}|} \int_{I_{j+1,n}} f(t)\,dt \right) \chi_{I_{j+1,n}}(x)$$
$$= a\chi_{I_{j,k}^-}(x) + b\chi_{I_{j,k}^+}(x)$$

である．また，

$$P_j f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{|I_{j,n}|} \int_{I_{j,n}} f(t)\,dt \right) \chi_{I_{j,n}}(x)$$
$$= c\chi_{I_{j,k}^-}(x) + c\chi_{I_{j,k}^+}(x).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} P_{j+1}f(x) - P_j f(x) &= (a-c)\,\chi_{I_{j,k}^-}(x) + (b-c)\chi_{I_{j,k}^+}(x) \\ &= \frac{1}{2}(a-b)\chi_{I_{j,k}^-}(x) - \frac{1}{2}(a-b)\chi_{I_{j,k}^+}(x) \\ &= \frac{1}{2}(a-b)2^{-j/2}\psi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

である．さらに

$$\begin{aligned} (f, \psi_{j,k}) &= 2^{j/2} \int_{I_{j,k}^-} f(x)\,dx - 2^{j/2} \int_{I_{j,k}^+} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2} \left(2^{j+1} \int_{I_{j,k}^-} f(x)\,dx - 2^{j+1} \int_{I_{j,k}^+} f(x)\,dx \right) 2^{-j/2} \\ &= \frac{1}{2}(a-b)2^{-j/2} \end{aligned}$$

である．よって $x \in I_{j,k}$ のとき

$$P_{j+1}f(x) - P_j f(x) = (f, \psi_{j,k})\,\psi_{j,k}(x)$$

が得られる． □

さて，次のことが成り立つ．任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ と $N > J$ に対して

$$\begin{aligned} f &= P_{N+1}f + (I - P_{N+1})f \\ &= P_N f + Q_N f + (I - P_{N+1})f \\ &= P_{N-1}f + Q_{N-1}f + Q_N f + (I - P_{N+1})f \\ &\quad \vdots \\ &= P_J f + Q_J f + Q_{J+1} f + \cdots + Q_N f + (I - P_{N+1})f \end{aligned}$$

である．ここで，$\|(I-P_{j+1})f\|_2 \to 0\ (j\to\infty)$ であるから，

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-P_Jf-\sum_{j=J}^{N}Q_jf\right\|_2=0$$

である．したがって次のことが成り立つ．

定理 7.16 $f\in L^2(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}f&=P_Jf+\sum_{j=J}^{\infty}Q_jf\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f,\varphi_{J,k})\,\varphi_{J,k}+\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f,\psi_{j,k})\,\psi_{j,k}\end{aligned}$$

である．ただし，ここで和は $L^2(\mathbf{R})$ ノルムの意味での収束を意味している．これを本書では便宜上**レベル J のハール分解**ということにする．

この定理と定理 6.5 から次のことが容易に得られる．

定理 7.17 $J\in\mathbf{Z}$ に対して，

$$\{\varphi_{J,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}\cup\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z},j\geqq J}$$

は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底である．

また，次のことも成り立つ．

定理 7.18 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底である．したがって正規直交ウェーブレットである．

証明 これを証明するためには，$f\in L^2(\mathbf{R})$ に対して，$\lim_{J\to-\infty}\|P_Jf\|_2=0$ を示せば十分である．まず，$f\in C_0(\mathbf{R})$ の場合を示す．$\mathrm{supp}(f)\subset[-2^n,2^n]$ とする．このとき $J<-n$ ならば，

$$\begin{aligned}P_Jf(x)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{|I_{J,k}|}\int_{I_{J,k}}f(t)\,dt\right)\chi_{I_{J,k}}(x)\\&=\frac{1}{|I_{J,-1}|}\int_{I_{J,-1}}f(t)\,dt\cdot\chi_{I_{J,-1}}(x)+\frac{1}{|I_{J,0}|}\int_{I_{J,0}}f(t)\,dt\cdot\chi_{I_{J,0}}(x)\end{aligned}$$

であるから，

$$\|P_Jf\|_2^2=\left|\frac{1}{|I_{J,-1}|}\int_{I_{J,-1}}f(t)\,dt\right|^2|I_{J,-1}|+\left|\frac{1}{|I_{J,0}|}\int_{I_{J,0}}f(t)\,dt\right|^2|I_{J,0}|$$

$$= \frac{1}{|I_{J,-1}|}\left|\int_{I_{J,-1}} f(t)\,dt\right|^2 + \frac{1}{|I_{J,0}|}\left|\int_{I_{J,0}} f(t)\,dt\right|^2$$

$$\leqq \frac{1}{|I_{J,-1}|}\|f\|_1^2 + \frac{1}{|I_{J,0}|}\|f\|_1^2 \to 0 \qquad (J \to -\infty)$$

が成り立つ．$f \in L^2(\mathbf{R})$ の場合，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\|f-g\|_2 < \varepsilon$ となる $g \in C_0(\mathbf{R})$ をとる．このとき，

$$\|P_J f\|_2 \leqq \|P_J f - P_J g\|_2 + \|P_J g\|_2 \leqq \|f-g\|_2 + \|P_J g\|_2$$

$$\leqq \varepsilon + \|P_J g\|_2 \to \varepsilon \qquad (J \to -\infty)$$

である．ゆえに $\limsup_{J\to-\infty}\|P_J f\|_2 \leqq \varepsilon$ である．ここで ε は任意の正数であるから，定理が証明される．　□

7.3.2 区間上のハール基底

ここでは，$[0,1)$ 上のハール・ウェーブレットについて述べる．以下では $f, g \in L^2([0,1))$ に対して

$$(f,g)_{L^2([0,1))} = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

とする．$L^2([0,1))$ 上の正規直交基底としてフーリエ基底 $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ があることは，これまで述べてきた．ここでは特にフーリエ基底とハール基底の違いのひとつについてふれる．

$$\mathcal{H} = \{1, \psi_{j,k} : j \in \mathbf{Z}_+, k = 0, \cdots, 2^j - 1\}$$

とする．ここで 1 は定数関数であるが，$\varphi_{0,0}(x) = 1$ $(x \in [0,1))$ に注意してほしい．次のことが成り立つ．

定理 7.19 $\mathcal{H}$ は $L^2([0,1))$ の正規直交基底である．

証明 正規直交系であることはすでに示したことによる．任意に $f \in L^2([0,1))$ をとる．

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in [0,1)), \\ 0 & (x \notin [0,1)) \end{cases}$$

とする．$\widetilde{f} \in L^2(\mathbf{R})$ であるから，

$$\widetilde{f} = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\widetilde{f}, \varphi_{0,k}\right)\varphi_{0,k} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\widetilde{f}, \psi_{j,k}\right)\psi_{j,k}$$

が L^2 ノルム収束の意味で成り立つ．ただし $\operatorname{supp}(\widetilde{f}) \subset [0,1]$ であるから，$[0,1)$ 上で

$$f = (f, \varphi_{0,0})_{L^2([0,1))}\, \varphi_{0,0} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} (f, \psi_{j,k})_{L^2([0,1))}\, \psi_{j,k}$$

が $L^2([0,1))$ ノルム収束の意味で成り立っている．ここで $(\cdot,\cdot)_{L^2([0,1))}$ は $L^2([0,1))$ の内積である． □

フーリエ級数展開では，連続関数でもそのフーリエ級数がすべての点で収束するとは限らない．これに対して，ハール・ウェーブレットでは次のようなことが成り立つ．

定理 7.20 f を $[0,1]$ 上の連続関数とする．このとき，f の $[0,1)$ でのハール・ウェーブレットによる展開は

$$\sup_{x\in[0,1)} \left| f(x) - \left\{ (f,\varphi)_{L^2([0,1))}\varphi(x) + \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{2^j-1} (f,\psi_{j,k})_{L^2([0,1))}\psi_{j,k}(x) \right\} \right| \to 0$$

$(N \to \infty)$ を満たす．

証明 あるコンパクトな台をもつ連続関数 $f_\rho(x)$ を $f_\rho(x) = f(x)$ $(x \in [0,1])$ となるようにとることができる．命題 7.15 の証明のあとにおける考察から

$$f_\rho = P_J f_\rho + Q_J f_\rho + Q_{J+1} f_\rho + \cdots + Q_N f_\rho + (I - P_{N+1}) f_\rho.$$

ここで $x \in [0,1)$ の場合，

$$\begin{aligned} P_j f_\rho(x) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f_\rho(t)\,dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f_\rho(t)\,dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2^j-1} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(t)\,dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} (f,\varphi_{j,k})_{L^2([0,1))}\varphi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

であり，

$$Q_j f_\rho(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f_\rho, \psi_{j,k})\psi_{j,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} (f,\psi_{j,k})_{L^2([0,1))}\psi_{j,k}(x)$$

である．したがって $x \in [0,1)$ のとき $J = 0$ の場合を適用し次を得る：

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - \left\{ (f,\varphi)_{L^2([0,1))}\varphi(x) + \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{2^j-1} (f,\psi_{j,k})_{L^2([0,1))}\psi_{j,k}(x) \right\} \right| \\ &\qquad = |f_\rho(x) - P_{N+1} f_\rho(x)|. \end{aligned}$$

ゆえに，定理 7.14 より定理が証明された． □

7.3.3 ハール・ウェーブレットに対する多重解像度解析

S. Mallat, Y. Meyer は多重解像度解析 (multiresolution analysis, MRA) を導入した．MRA の一般的な定義は次節で述べることにして，本項では，ハール・ウェーブレットの場合の多重解像度解析について述べる．

φ をハール・スケーリング関数，ψ をハール関数とする．$j \in \mathbf{Z}$ に対して $\mathrm{span}(\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}})$ を $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間とみなし，その閉包を

$$V_j = \overline{\mathrm{span}}(\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}})$$

と表す．V_j は $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間である．レベル j の階段関数のグラフは，小区間 $I_{j,k}$ では定数となっているようなグラフをもっている．このような解像度をもつ関数の空間が V_j である．この閉部分空間の族 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ をハール・ウェーブレットによる**多重解像度解析**という．以下，$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ の性質をみていくことにしよう．

任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対して，定義から

$$P_j f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f, \varphi_{j,k})\varphi_{j,k}$$

であるから，ヒルベルト空間の一般論より，P_j は $L^2(\mathbf{R})$ から V_j への直交射影になっていることがわかる．

$\varphi_{j,k} \in \mathrm{span}(\{\varphi_{j+1,m}\}_{m\in\mathbf{Z}})$ より，

$$V_j \subset V_{j+1} \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

を満たしている．また，

$$\varphi_{0,l}(x-k) = \varphi((x-k)-l) = \varphi_{0,l+k}(x)$$

より，

$$f \in V_0 \implies f(\cdot - k) \in V_0 \quad (k \in \mathbf{Z})$$

が得られる．さらに

$$f \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}$$

が成立することが

$$\varphi_{j,k}(2x) = 2^{j/2}\varphi(2^{j+1}x - k) = 2^{-1/2}\varphi_{j+1,k}(x)$$

よりわかる．

さて，$L^2(\mathbf{R})$ の関数 $f(x)$ の近似として $L^2(\mathbf{R})$ の V_J への直交射影 $P_J f$ を

考え,

$$f = P_J f + \sum_{j=J}^{\infty} Q_j f$$

なるレベル J のハール分解が得られた．ここで $Q_j = P_j - P_{j-1}$ である．これは関数解析的に次のように特徴づけられる．V_{j-1} は V_j の閉部分空間であるので，直交分解できる．すなわち

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

を満たす V_j における V_{j-1} の直交補空間 W_{j-1} が一意的に存在する．W_{j-1} は V_j に属する関数の解像度を一つ下げたときに現れる誤差関数の空間である．定理 7.17 と命題 7.15 より，Q_j は V_j から W_{j-1} への直交射影であることがわかる．さて，ハール分解が可能であるためには，任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対して

$$\lim_{j \to \infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$$

であることを必要とした．これはいい換えれば，$\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j$ が $L^2(\mathbf{R})$ で $L^2(\mathbf{R})$ ノルムに関して稠密であることを意味している．さらに，

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_j f$$

となるために，任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対して，

$$\lim_{j \to -\infty} \|P_j f\|_2 = 0$$

となることも必要であった．これは $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$ を意味している．

7.3.4 多重解像度解析とウェーブレットの構成

多重解像度解析の一般的な定義は次のものである．この定義の背景は前項の考察からわかるであろう．

定義 7.6 $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間の族 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ が次の条件 (1)–(5) を満たすとき**多重解像度解析**であるという．

(1) $V_j \subset V_{j+1}$ $(j \in \mathbf{Z})$

(2) $f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ $(j \in \mathbf{Z})$

(3) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$

(4) $\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ は $L^2(\mathbf{R})$ で稠密.

(5) ある $\varphi \in V_0$ が存在し, $\{\varphi(x-k) : k \in \mathbf{Z}\}$ は V_0の正規直交基底となる.

定義の φ をこの多重解像度解析の**スケーリング関数**という.

ここで $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$ ((7.20) 参照) より, $\varphi_{j,k}(2^{-j}x) = 2^{j/2}\varphi(x - k) \in V_0$ である. ゆえに定義 7.6(2) より $\varphi_{j,k} \in V_j$ である.

定義 7.7 $r = 0, 1, 2, \cdots, \infty$ とする. 多重解像度解析のスケーリング関数 φ が $\varphi \in C^r(\mathbf{R})$ であり,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}(1+|x|)^n \left|\frac{d^k\varphi}{dx^k}(x)\right| < \infty \qquad (k = 0, \cdots, r;\ n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たすとき, φ は r–**正則**であるといい, r–正則なスケーリング関数をもつ多重解像度解析を r–**正則**であるという.

V_{j-1} は V_j の閉部分空間であるから, V_j における V_{j-1} の直交補部分空間 W_{j-1} が存在する. すなわち

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

が成立する. P_j を $L^2(\mathbf{R})$ から V_j への直交射影 (正射影) とし,

$$Q_j = P_j - P_{j-1} \qquad (j \in \mathbf{Z})$$

と定義する. Q_j は $L^2(\mathbf{R})$ から W_{j-1} への直交射影である.

次のことが成り立つ.

命題 7.21 任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\lim_{j\to\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0, \tag{7.22}$$

$$\lim_{j\to-\infty} \|P_j f\|_2 = 0, \tag{7.23}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{|j|\leqq N} Q_j f \right\|_2 = 0, \tag{7.24}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - P_J f - \sum_{j=J}^{N} Q_j f \right\|_2 = 0 \qquad (J \in \mathbf{Z}). \tag{7.25}$$

証明 $k<j$ のとき $P_kP_j=P_jP_k=P_k$ であることに注意する．これより

$$\|P_kf\|_2=\|P_kP_jf\|_2\leqq\|P_jf\|_2$$

である．したがって $\lim_{k\to-\infty}\|P_kf\|_2$ が存在する．さて，

$$(P_kf,P_jf)=(f,P_kP_jf)=(f,P_kf)=(f,P_kP_kf)=\|P_kf\|_2^2$$

であるから

$$\begin{aligned}\|P_kf-P_jf\|_2^2&=\|P_kf\|_2^2+\|P_jf\|_2^2-2\,\mathrm{Re}\,(P_kf,P_jf)\\&=\|P_jf\|_2^2-\|P_kf\|_2^2\to0\qquad(j,k\to-\infty)\end{aligned}$$

となる．したがって，ある $v\in L^2(\mathbf{R})$ が存在し，

$$v=\lim_{k\to-\infty}P_kf\in\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$$

である．ゆえに (7.23) が証明された．

次に，任意の $f\in L^2(\mathbf{R})$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，十分大きな j とある $g\in V_j$ が存在し，

$$\|f-g\|_2<\varepsilon$$

である．$P_jg=g$ であるから，

$$\|f-P_jf\|_2\leqq\|f-g\|_2+\|P_jg-P_jf\|_2\leqq2\varepsilon.$$

よって (7.22) が証明された．

さて，

$$\begin{aligned}f&=P_Nf+(I-P_N)f=Q_Nf+P_{N-1}f+(I-P_N)f\\&=Q_Nf+Q_{N-1}f+P_{N-2}f+(I-P_N)f\\&=\sum_{k=-N}^{N}Q_kf+P_{-N-1}f+(I-P_N)f\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\left\|f-\sum_{k=-N}^{N}Q_kf\right\|_2\leqq\|P_{-N-1}f\|_2+\|f-P_Nf\|_2\to0\qquad(N\to\infty)$$

より，(7.24) が証明された．(7.25) の証明は練習問題とする．□

定理 7.22 $\{\psi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が W_0 の正規直交基底になっているものとする．このとき

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$$

は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底である．すなわち，ψ は正規直交ウェーブレットに

なっている．また，$J \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\{\varphi_{J,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z},\, j\geqq J}$$

も $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底になっている．

証明 容易に $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$，$\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ がそれぞれ V_j と W_j の正規直交基底になっていることがわかる．したがって

$$P_j f = \sum_k (f, \varphi_{j,k})\varphi_{j,k}, \qquad Q_{j+1} f = \sum_k (f, \psi_{j,k})\psi_{j,k}$$

であることに注意すれば，命題 7.21 より定理が証明される． □

最後に，多重解像度解析から，$\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が W_0 の正規直交基底となるような ψ のつくり方を記しておく．$\varphi(x)$ を多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ のスケーリング関数とする．$V_{-1} \subset V_0$ より

$$2^{-1}\varphi(2^{-1}x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \varphi(x-k)$$

が成り立つ．両辺をフーリエ変換すると

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k e^{-ik\xi}\right)\widehat{\varphi}(\xi) \tag{7.26}$$

となる．ここで $m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k e^{-ik\xi}$ とおくと，$m_0(\xi)$ は周期 2π の関数で，$L^2([-\pi,\pi))$ に属する．これをスケーリング関数 φ の**ローパスフィルタ**という．(7.26) をこの記号を使って改めて記すと

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \tag{7.27}$$

である．

本書の範囲を超えるので証明は略すが，次の定理が知られている．証明は，たとえば [HW] などを参照してほしい．

定理 7.23

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{1-k}\overline{h_{1-k}}\varphi(2x-k)$$

とすると $\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は W_0 の正規直交基底である．したがって，ψ は正規直交ウェーブレットである．

これをハール・スケーリング関数からつくられる多重解像度解析に適用してみよう．

▶ **例 (ハール基底)** ハール・スケーリング関数 $\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$ に対して,

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x-1)$$

であるから, $h_0 = h_1 = 1/2$, $h_k = 0$ $(k \neq 1, 2)$ である. したがって, $g_0 = -1/2$, $g_1 = 1/2$, $g_k = 0$ $(k \neq 0, 1)$ となり, 定理 7.23 より,

$$\psi(x) = -\chi_{[0,1)}(2x) + \chi_{[0,1)}(2x-1) = -\chi_{[0,1/2)}(x) + \chi_{[1/2,1)}(x)$$

がそれから定まるウェーブレットである. □

定理 7.23 を用いて, 多重解像度解析から正規直交ウェーブレットをつくることができる. たとえば Meyer は $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ に属する正規直交ウェーブレットを構成している. また, スプライン関数とよばれる関数から Lemarié は正規直交ウェーブレットを組織的に構成した. このほか, Daubechies はコンパクトな台をもつ微分可能な正規直交ウェーブレットを構成した. 一般に, コンパクトな台をもち C^∞ 級の正規直交ウェーブレットは存在しないことが知られている.

ウェーブレットに関するさらに詳しいことは, たとえば巻末の参考文献を参照してほしい.

Part III

フーリエ解析から関数解析へ

前章までででは，いくつかの偏微分方程式あるいは常微分方程式の固有値問題が，直交関数系を使って解くことができることを示した．しかし，それは特別な直交関数系と特別な微分方程式に対するものであった．それでは，一般に微分作用素 (あるいはもっと一般的な立場にたって，何かある線形作用素) が与えられたとき，その固有値問題を解くことのできる直交関数系が存在するだろうか．この問題は数学的にも物理的にも大変重要な問題のひとつとして知られている．Part III では，微分作用素や，より一般の線形作用素の固有値問題について学ぶ．

8 章

ヒルベルト空間上の線形作用素

8.1 行列のスペクトル分解

線形作用素の固有値について，もっとも詳しくいろいろなことがわかっているのは，有限次元ヒルベルト空間の線形作用素の場合である．まずは，有限次元の場合についてわかっていることをまとめておきたい．本節の話を無限次元ヒルベルト空間に一般化することが，Part III の目標である．

話を簡単にするため，$X = \mathbf{C}^n$ とし，

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in X$$

に対して，内積を $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}$ によって定める．このとき，

$$\|\mathbf{u}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 \right)^{1/2}$$

であり，$\mathbf{C}^n$ の完備性から $(X, (,))$ は $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間となる．ところで，$\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^n$ への線形作用素 A は，つねにある $n \times n$ の複素行列によって

$$A(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

と表されている．そこで本節では，線形作用素の代わりに行列について考えることにする．

まず，行列に関するいくつかの定義を思い出しておこう．行列 A に対して，

$\lambda \in \mathbf{C}$ が A の**固有値**であるとは，ある 0 でない元 $\mathbf{x} \in X$ で

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{8.1}$$

が成り立つものが存在することである．この (8.1) を満たす $\mathbf{x} \in X \setminus \{0\}$ を λ に関する**固有ベクトル**という．

考えたい問題は，ある行列 A が与えられたとき，A の固有ベクトルで，しかも $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底になっているようなものが存在するかどうか，ということである．この問題がもし肯定的に解けるならば，たとえば，方程式 $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$ を一般化フーリエ級数の話を使って調べることができる．

行列の固有値問題については，線形代数においてさまざまな結果が証明されているが，ここでは，これから無限次元ヒルベルト空間へ一般化しようとしている部分として，エルミート行列の固有値問題について述べることにする．

エルミート行列の定義からはじめよう．

定義 8.1 (1) **(随伴行列)** 行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{に対して，} \quad A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

を A の随伴行列という．

(2) **(エルミート行列)** $A = A^*$ なる行列をエルミート行列という．

エルミート行列の固有値問題を考えるうえで，次のユニタリー行列も必要になる．

(3) **(ユニタリー行列)**

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (=: I_n)$$

を満たす行列をユニタリー行列という．

なお，随伴行列については，

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A^*\mathbf{v}) \tag{8.2}$$

が成り立ち，A がユニタリー行列であれば

$$\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| \qquad (\mathbf{u} \in X) \tag{8.3}$$

となっていることに注意しておく．

次の定理は，エルミート行列と固有値の関係を明確にとらえた重要な定理であり，エルミート行列の固有値問題に解答を与えるものでもある．

定理 8.1 A をエルミート行列とすると，A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ はすべて実数であり，さらにあるユニタリー行列 U により次のように対角化できる:

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

証明は線形代数の本に出ているのでここでは省略する ([佐武] 参照).

この定理と固有値問題との関係を述べておこう．

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{とおき,} \quad \mathbf{u}^{(j)} = \begin{bmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{bmatrix}$$

とする．

$$AU = U\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

であるから，$A\mathbf{u}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{u}^{(j)}$ がわかる．また，U のユニタリー性から，

$$I_n = U^*U = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}) & \ldots & (\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(n)}) & \ldots & (\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}) \end{bmatrix}.$$

ゆえに，$\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\}$ は X の正規直交基底である．したがって，U から

A の固有値問題を解くことのできる正規直交基底をみつけることができた.

ところで，このような正規直交基底がひとたび得られると，一般化フーリエ級数の話から，任意の $\mathbf{x} \in X$ を

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})\mathbf{u}^{(n)} \tag{8.4}$$

と分解できる．ゆえに $A\mathbf{x}$ は

$$A\mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})\mathbf{u}^{(n)} \tag{8.5}$$

となっている．このことは，$\mathbf{x}$ に A を施すという操作が，一般化フーリエ級数展開 (8.4) において考えると，単に A の固有値をかけるという操作となっていることを意味している．(ちょうど，微分演算がフーリエ変換あるいはフーリエ級数展開して考えると，かけ算に変わっていることに相当している．)

Fourier が熱方程式の初期値問題を解くのにフーリエ級数を用いる方法を開発したが，そのアイデアを，ここで考えている方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ にあてはめてみよう．まず，$\mathbf{y}$ を $\{\mathbf{u}^{(j)}\}_j$ に関して一般化フーリエ級数展開する:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y}, \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + (\mathbf{y}, \mathbf{u}^{(n)})\mathbf{u}^{(n)}.$$

簡単のため，

$$0 \neq \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

の場合，すなわち，$\lambda_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ の場合を考える．このとき，

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_1}(\mathbf{y}, \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}(\mathbf{y}, \mathbf{u}^{(n)})\mathbf{u}^{(n)}$$

とおけば，(8.5) よりこれが $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を満たす解になっている．

さて，本書ではこういった話を有限次元ヒルベルト空間だけでなく，一般のヒルベルト空間に拡張したい．そのために，多少ソフィスティケートして，分解 (8.4), (8.5) をもう少し整理した形で記述しておくことにする．λ_i の番号を付け替えて，

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$$

とする．さらに，この中から相異なる固有値を抜き出して，

$$\mu_1 < \cdots < \mu_m, \qquad \{\mu_1, \ldots, \mu_m\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

となるようにしておき，μ_i と同じ値をもつすべての λ_k に関する固有ベクトル $\mathbf{u}^{(k)}$ で張られる線形空間を W_i とおく．この W_i を μ_i の**固有空間**という．明

らかに,

$$X = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

である．ここで，$i \neq j$ ならば W_i の任意の元と W_j の任意の元は直交している．さて，P_i を $\mathbf{C}^n$ から W_i への直交射影とすると，(8.4), (8.5) は次のように書くことができる:

$$I_n = P_1 + \cdots + P_m, \tag{8.6}$$

$$A = \mu_1 P_1 + \cdots + \mu_m P_m. \tag{8.7}$$

この (8.6) を A に関する**単位の分解**といい，(8.7) を A の**スペクトル分解**という．

次節以降では，この行列の話を一般のヒルベルト空間に一般化し，さらにそれを偏微分作用素に応用していくことにする．

8.2 線形作用素

以下本節では，前節で紹介した行列の話をヒルベルト空間上に一般化するため，ヒルベルト空間上の線形作用素の一般論を述べる．そして，エルミート行列やユニタリー行列のヒルベルト空間への一般化である自己共役作用素，ユニタリー作用素についての基礎事項を解説する．

本章をとおして，$(X, (\ ,\ )_X)$, $(Y, (\ ,\ )_Y)$ を $\mathbf{K}$ 上のヒルベルト空間とする．ただし，$\mathbf{K} = \mathbf{C}$ または $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ である．

まず，X から Y への線形作用素を定義する．

定義 8.2 (線形作用素) X の部分空間 D の各元 u に Y の元 $T(u)$ が一意的に対応し,

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \qquad (u, v \in D,\ \alpha, \beta \in \mathbf{K})$$

を満たすとき，T を X から Y への**線形作用素**といい，D を T の**定義域**という．T の定義域をしばしば $D(T)$ と表す．また,

$$R(T) = \{T(u) : u \in D(T)\}$$

を T の**値域**という．記述を簡略化するため，$T(u)$ を単に Tu と記すこともある．

無限次元ヒルベルト空間の枠組みのなかで線形作用素を考えると，その定義域の選び方によって作用素の性質が大きく変わってくる．たとえば，同じ微分作用素 $-id/dx$ でも，定義域を単に $C^\infty(\mathbf{R})$ にするか，それとも

$$C^\infty((-\pi,\pi)) := \{f \in C^\infty(\mathbf{R}) : f \text{ は周期 } 2\pi\}$$

にするかで，その性質がガラリと変ってしまう (どういうことかはあとで詳しく述べる)．とにかく，無限次元のヒルベルト空間上の線形作用素を論ずる場合，その定義域が何であるかを明確にしておかなければならない．

このことは，どのような場合においても徹底されていなければならない．たとえば，X から Y への二つの線形作用素 S, T が**等しい**というというときには，その定義域が完全に一致していることが必要とされる．すなわち，

$$D(S) = D(T), \quad \text{かつ} \quad S(u) = T(u)\ (u \in D(S))$$

であるとき，S と T が**等しい**という．S と T が等しいことを記号 $S = T$ によって表す．また，

$$D(S) \subset D(T), \quad \text{かつ} \quad S(u) = T(u)\ (u \in D(S))$$

という場合もしばしば現れるが，このときには，T は S の**拡張**であるといい，記号では $S \subset T$ と表す．明らかに

$$S = T \iff S \subset T \text{ かつ } T \subset S$$

である．

8.3 連続線形作用素

本節では，線形作用素のなかでも比較的扱いやすい連続線形作用素について学ぶ．

定義 8.3 T を X から Y への線形作用素とする．$u_0 \in D(T)$ で T が**連続**であるとは，$u_n \in D(T)$, $\|u_n - u_0\|_X \to 0\ (n \to \infty)$ なる $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，必ず

$$\|T(u_n) - T(u_0)\|_Y \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となることである．

また，T が $D(T)$ のすべての点で連続であるとき，T は**連続**であるという．

定理 8.2　T を $D(T)$ を定義域とする X から Y への線形作用素とする．次の (1), (2), (3) は互いに同値である:

(1) T は連続である．

(2) T は 0 で連続である．

(3) ある $M>0$ が存在して，すべての $u \in D(T)$ に対して

$$\|T(u)\|_Y \leqq M\|u\|_X.$$

注意　一般の関数では，一点での連続性から全空間での連続性はもちろん期待できない．しかし，線形性があるため，定理のようなことがいえる．

証明　(1) $\Longrightarrow$ (2) は明らか．

(2) $\Longrightarrow$ (3) を示す．そのため背理法を使う．(3) が成り立たないとすると，任意の $n \in \mathbf{Z}_+$ に対して，

$$\|T(u_n)\|_Y > n\|u_n\|_X$$

を満たす $u_n \in D(T)$ が存在する．このとき，$u_n \neq 0$ である．なぜならば，$u_n = 0$ であるとすると，$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$ より $T(0) = 0$，すなわち $T(u_n) = 0$ となってしまうからである．そこで，$v_n = (\sqrt{n}\|u_n\|_X)^{-1}u_n$ とおくと，

$$\|T(v_n)\|_Y = (\sqrt{n}\|u_n\|_X)^{-1}\|T(u_n)\|_Y > \sqrt{n} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

である．一方，$\|v_n\|_X = (\sqrt{n})^{-1} \to 0\ (n \to \infty)$ でもあるから，これは T の 0 での連続性に反する．

最後に (3) $\Longrightarrow$ (1) を示す．$\|u_n - u\|_X \to 0\ (n \to \infty)$ とすると

$$\|T(u_n) - T(u)\|_Y = \|T(u_n - u)\|_Y \leqq M\|u_n - u\|_X \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

である． □

一般に，定理 8.2 (3) を満たす作用素を有界作用素というが，線形作用素に対しては定理 8.2 (2) と (3) が同値であるから，連続線形作用素のことを**有界線形作用素**ということもある．

定義 8.4　T を X から Y への線形作用素で連続なものとする．このとき，

$$\|T\| = \sup_{u \in D(T)\setminus\{0\}} \frac{\|T(u)\|_Y}{\|u\|_X}$$

を T の**作用素ノルム**という．

定理 8.2 (3) より，T が $D(T)$ 上連続であることと $\|T\| < \infty$ となることが同値であることがわかる．

命題 8.3 T を X から Y への線形作用素とするとき，次が成り立つ:

$$\|T\| = \sup_{u\in D(T),\, \|u\|_X \leqq 1} \|T(u)\|_Y.$$

証明 $|||T||| = \sup_{u\in D(T),\, \|u\|_X \leqq 1} \|T(u)\|_Y$ とする．$\|u\|_X \leqq 1$ より，

$$\|T(u)\|_Y \leqq \frac{\|T(u)\|_Y}{\|u\|_X} \leqq \|T\|$$

であるから，$|||T||| \leqq \|T\|$．一方，$u \in D(T) \setminus \{0\}$ に対して，

$$\frac{\|T(u)\|_Y}{\|u\|_X} = \left\|T(\|u\|_X^{-1}u)\right\|_Y \leqq \|T\|$$

であるから，$\|T\| \leqq |||T|||$．よって命題が証明された． □

T を X から Y への線形作用素とする．以下本書では，T **が連続の場合に限って** T **が** X **から** Y **への連続線形作用素というとき，**$D(T) = X$ **であるものとする．** 特に，$D(T) \neq X$ なる連続線形作用素を扱いたい場合は，$D(T)$ から Y への連続線形作用素ということにする．また，$Y = X$ の場合は，X から Y への連続線形作用素のことを単に X 上の連続線形作用素という．ただし，T を X から Y への線形作用素という場合には——すなわち連続性を仮定しない場合には——$D(T) = X$ とは限らないものとする．

記号の簡略化のため，X から Y への連続線形作用素全体のなす集合を $B(X,Y)$ と表し，特に $B(X) = B(X,X)$ と記すことにする．また，$X^* = B(X,\mathbf{K})$ と表す．ただし，ここで $\mathbf{K}$ は，$(a,b)_{\mathbf{K}} = a\bar{b}$ を内積とする $\mathbf{K}$ 上のヒルベルト空間とみなす．

$B(X,Y)$ は次の演算で $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間になっている: $T, S \in B(X,Y)$ およびスカラー $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して，$\alpha T + \beta S$ を

$$(\alpha T + \beta S)(u) = \alpha T(u) + \beta S(u) \qquad (u \in X)$$

とする．すると

$$\begin{aligned}\|\alpha T + \beta S\| &= \sup_{\|u\|\leqq 1} \{\|\alpha Tu + \beta Su\|_Y\} \\ &\leqq \sup_{\|u\|\leqq 1} \{|\alpha|\,\|Tu\|_Y + |\beta|\,\|Su\|_Y\} \\ &\leqq \sup_{\|u\|\leqq 1} \{|\alpha|\,\|T\|\,\|u\|_X + |\beta|\,\|S\|\,\|u\|_X\}\end{aligned}$$

$$\leqq |\alpha|\,\|T\| + |\beta|\,\|S\| < \infty$$

であるから，$\alpha T + \beta S \in B(X,Y)$ である．さらに，$B(X,Y)$ は作用素ノルムに関して完備になる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 8.4 $T_n \in B(X,Y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が

$$\|T_n - T_m\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

を満たしているならば，ある $T \in B(X,Y)$ で $\|T_n - T\| \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものがただ一つ存在する．

証明 任意の $u \in X$ に対して

$$\|T_n u - T_m u\|_Y \leqq \|T_n - T_m\|\,\|u\|_X \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

であるから，Y の完備性から，ある $v \in Y$ で $\|T_n u - v\|_Y \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものがただ一つ存在する．そこで $Tu = v$ と定義する．$u_1, u_2 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して

$$\begin{aligned} T(\alpha u_1 + \beta u_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha u_1 + \beta u_2) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n u_1 + \beta \lim_{n\to\infty} T_n u_2 = \alpha T u_1 + \beta T u_2 \end{aligned}$$

であるから，T は X を定義域とする線形作用素になっている．また，Tu の定義から

$$\bigl|\|Tu\|_Y - \|T_n u\|_Y\bigr| \leqq \|Tu - T_n u\|_Y \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．(この不等式は次からわかる：$y_1, y_2 \in Y$ に対して

$$\|y_j\|_Y = \|y_j - y_k + y_k\|_Y \leqq \|y_j - y_k\|_Y + \|y_k\|_Y \qquad (j, k = 1, 2)$$

であるから，$\bigl|\,\|y_1\|_Y - \|y_2\|_Y\,\bigr| \leqq \|y_1 - y_2\|_Y$ となっている．) 同様の議論で

$$\bigl|\|T_n\| - \|T_m\|\bigr| \leqq \|T_n - T_m\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

であるから，$c = \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \in \mathbf{R}$ が存在する．したがって，

$$\|Tu\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n u\|_Y \leqq \|u\| \lim_{n\to\infty} \|T_n\| = c\|u\|$$

となり $T \in B(X,Y)$ がわかる．

最後に $\|T_n - T\| \to 0$ を示す．$\|T_n - T_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 N が存在し，$n, m \geqq N$ であれば $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ となる．したがって，任意の $u \in X$ に対して $\|T_n u - T_m u\|_Y \leqq \varepsilon \|u\|_X$ がわかる．ここで，$m \to \infty$ とすると $\|T_n u - Tu\|_Y \leqq \varepsilon \|u\|_Y$ となる．ゆえに $\|T_n - T\| \leqq \varepsilon$ となり $\|T_n - T\| \to 0$ が証明された． □

以下に，連続線形作用素と連続でない線形作用素の例をあげる．

▶ **例 1 (積分作用素)**　K を $[0,1]\times[0,1]$ 上の連続関数とし，

$$T(u)(x)=\int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy \qquad (u\in L^2([0,1]))$$

とする．このとき，T は $L^2([0,1])$ から $L^2([0,1])$ への連続線形作用素である．

証明　線形性は容易に示すことができるので，連続性だけ証明する．シュヴァルツの不等式より

$$\begin{aligned}\int_0^1 |T(u)(x)|^2\,dx &= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy\right|^2 dx\\ &\leqq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2\,dy\right)\left(\int_0^1 |u(y)|^2\,dy\right)dx\\ &= \int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^2\,dydx\left(\int_0^1 |u(y)|^2\,dy\right).\end{aligned}$$

ゆえに $\|T(u)\|_2\leqq M\|u\|_2$ である．ただし，

$$M=\left(\int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|^2 dydx\right)^{1/2}<\infty. \qquad \square$$

▶ **例 2 (直交射影作用素)**　M を X の閉部分空間とし，P_M を X から M への直交射影作用素とすると，P_M は X 上の連続線形作用素である．　$\square$

▶ **例 3 (ヒルベルト変換)**　$\mathcal{H}$ を 4.6 節 例 9 のヒルベルト変換とする．$f\in L^2(\mathbf{R})$ のとき $\mathcal{H}f=\mathcal{F}^{-1}[(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)\widehat{f}\,]$ と定めて $\mathcal{H}$ を拡張すれば，定理 4.18 の証明と同様に

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}f\|_2 &= (2\pi)^{-1/2}\|\mathcal{F}[\mathcal{H}f]\|_2\\ &= (2\pi)^{-1/2}\|(\mathrm{sgn}\,\xi)\widehat{f}\,\|_2\\ &= (2\pi)^{-1/2}\|\widehat{f}\,\|_2=\|f\|_2.\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathcal{H}$ は $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の連続線形作用素である．　$\square$

▶ **例 4 (微分作用素)**　$X=L^2((0,1))$ とし，$C_0^\infty((0,1))$ により，$(0,1)$ 上の C^∞ 級関数でその台が $(0,1)$ に含まれているもの全体を表す．$u\in C_0^\infty((0,1))$ に対して

$$T(u)(x)=\frac{df}{dx}(x) \qquad (x\in(0,1))$$

と定義する．このとき，T は $D(T)=C_0^\infty((0,1))$ なる X から X への線形作

用素であるが，$D(T)$ 上連続ではない．

証明 T が $u=0$ で連続でないことを証明すればよい．$u_n(x)=x^n/\sqrt{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ とおく．このとき，

$$\|u_n\|_2=\left(\frac{1}{n}\int_0^1 x^{2n}\,dx\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となる．一方，

$$\|T(u_n)\|_2=\left(n\int_0^1 x^{2n-2}dx\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{n}{2n-1}}\to\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n\to\infty)$$

であるから，T は 0 で連続になっていない． □

この例からわかるように，微分作用素は連続線形作用素として扱うことはできない．微分作用素を扱うにはどうすればよいかはもう少しあとで学ぶことにして，次節ではヒルベルト空間論において非常に重要な X から $\mathbf{K}$ への連続線形作用素について述べておきたい．

8.4 連続線形汎関数とリースの定理

関数解析学では，X から $\mathbf{K}$ への線形作用素を特に X 上の**線形汎関数**という．本節では，X 上の連続線形汎関数について学ぶ．

連続線形汎関数の例として考えられるものに，たとえば，$u\in X$ を固定したとき，

$$\varphi(v)=(v,u) \qquad (v\in X)$$

なるものがあげられる．これは，内積の性質とシュヴァルツの不等式より X 上の連続線形汎関数になっている (下記の定理 8.5 参照)．じつは，すべての X 上の連続線形汎関数はこの形をしたものに限るということが Riesz によって証明された．これが次に述べるリースの定理である．以下 $\varphi\in X^*$ に対して，$\|\varphi\|_{X^*}$ により φ の X から $\mathbf{K}$ への線形作用素としてのノルムを表すものとする．すなわち

$$\|\varphi\|_{X^*}=\sup_{u\in X,\ \|u\|_X\leqq 1}|\varphi(u)|$$

である．

定理 8.5 (リースの定理) (1) $u \in X$ に対して

$$\varphi_u(v) = (v, u) \qquad (v \in X)$$

と定義すると，$\varphi_u \in X^*$ である．

(2) 任意の $\varphi \in X^*$ に対して，ある $u \in X$ で

$$\varphi = \varphi_u, \qquad \|\varphi\|_{X^*} = \|u\|_X$$

となるものがただ一つ存在する．

証明 (1) φ_u の線形性は明らか．シュヴァルツの不等式より

$$|\varphi_u(v)| \leqq \|u\|_X \|v\|_X$$

であるから，$\|\varphi_u\|_{X^*} \leqq \|u\|_X$ で $\varphi_u \in X^*$ が成り立つ．

(2) 任意の $\varphi \in X^*$ をとる．$\varphi = 0$ の場合は $u = 0$ ととればよいので，$\varphi \neq 0$ の場合を考える．$M = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$ とおくと，明らかに M は X の閉部分空間である．定理 6.7 より $X = M \oplus M^\perp$ と直交分解できる．$M \neq X$ より $M^\perp$ は 0 以外の元 w を含む．$\varphi(w) \neq 0$ であるから $w' = w/\varphi(w) \in M^\perp$ である．ここで，$\varphi(w') = 1$ であることに注意しておく．以下，$u = w'/\|w'\|_X^2$ が求める元であることを証明する．

まず，$\varphi(v) = (v, u)$ $(v \in X)$ を示そう．任意の $v \in X$ に対して

$$v = (v - \varphi(v)w') + \varphi(v)w'$$

である．ここで

$$\varphi(v - \varphi(v)w') = \varphi(v) - \varphi(v)\varphi(w') = 0$$

であるから，$v - \varphi(v)w' \in M$ である．また，u の定義から $u \in M^\perp$ である．ゆえに，

$$(v, u) = (v - \varphi(v)w', u) + (\varphi(v)w', u) = (\varphi(v)w', u)$$

$$= \varphi(v)\left(w', \frac{w'}{\|w\|_X^2}\right) = \varphi(v)$$

となる．

次に，$\|\varphi\|_{X^*} \geqq \|u\|$ を示す．これは，

$$\|\varphi\|_{X^*} \geqq \varphi\left(\frac{w'}{\|w'\|_X}\right) = \frac{1}{\|w'\|_X} = \|u\|_X$$

より成り立つ．(1) と考えあわせれば，$\|\varphi\|_{X^*} = \|u\|_X$ が示すことができた．

最後に u の一意性を証明する．もし (2) を満たす u' があるとすると，

$$\|u - u'\|_X = \|\varphi_{u-u'}\|_{X^*} = \|\varphi_u - \varphi_{u'}\|_{X^*} = \|\varphi - \varphi\|_{X^*} = 0$$

より $u = u'$ である． □

8.5 閉作用素と可閉作用素

本書では，主として微分作用素を扱う．この場合，例 4 (p.188) からわかるように連続という条件は強すぎる．そこで，以下では，主に連続とは限らない線形作用素 (いわゆる非有界線形作用素) に関する話に焦点をあてる．

非有界作用素の研究では，あとでみるように，作用素のグラフに関する考察が不可欠である．X から Y への作用素のグラフは直積集合 $X \times Y$ のなかの図形であるので，作用素のグラフについて述べるまえに，$X \times Y$ 自身について基本的なことを知っておかなければならない．まず，ヒルベルト空間の直積についていくつかの事柄を学んでおこう．

8.5.1 直積ヒルベルト空間

X と Y の直積集合

$$X \times Y = \{[u, v] : u \in X,\ v \in Y\}$$

を考える．ただし，ここで $[u, v]$ は u と v の組で，

$$[u, v] = [u', v'] \iff u = u' \text{ かつ } v = v'$$

と定義する．このとき，$X \times Y$ には，次のようにして和とスカラー積を定義することができる:

$$[u_1, v_1] + [u_2, v_2] = [u_1 + u_2, v_1 + v_2] \qquad ([u_1, v_1],\ [u_2, v_2] \in X \times Y),$$

$$\alpha[u, v] = [\alpha u, \alpha v] \qquad ([u, v] \in X \times Y;\ \alpha \in \mathbf{K}).$$

この演算により，$X \times Y$ は $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間になる．

また，$[u_1, v_1], [u_2, v_2] \in X \times Y$ に対して

$$([u_1, v_1], [u_2, v_2])_{X \times Y} = (u_1, u_2)_X + (v_1, v_2)_Y$$

とすると，$(\cdot, \cdot)_{X \times Y}$ は $X \times Y$ の内積になっている．$(X \times Y, (\cdot, \cdot)_{X \times Y})$ を X と Y の**直積内積空間**という．

このとき，次が成り立つ．

定理 8.6 $(X \times Y, (\cdot, \cdot)_{X \times Y})$ は $\mathbf{K}$ 上のヒルベルト空間である．

証明 $X \times Y$ がその内積から定まるノルム

$$\|[u, v]\|_{X \times Y} = \left(([u, v], [u, v])_{X \times Y}\right)^{1/2}$$

によって完備になることを示せばよい．

$$\|[u,v]\|_{X\times Y} = \left\{\|u\|_X^2 + \|v\|_Y^2\right\}^{1/2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(\|u\|_X + \|v\|_Y) &\leqq \|[u,v]\|_{X\times Y} \\ &\leqq \|u\|_X + \|v\|_Y \end{aligned} \tag{8.8}$$

が成り立つ．したがって，もし $\left\{[u_n, v_n]\right\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列ならば，$\{u_n\}$, $\{v_n\}$ もそれぞれ X, Y におけるコーシー列になる．X, Y ともに完備であるから，ある $u \in X$ とある $v \in Y$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_X = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_Y = 0$$

となる．ゆえに，(8.8) の二番目の不等式より次を得る：

$$\lim_{n\to\infty} \|[u_n, v_n] - [u,v]\|_{X\times Y} = 0.$$

□

8.5.2　線形作用素のグラフと閉作用素

次に，線形作用素のグラフについて述べる．

定義 8.5　T を X から Y への線形作用素であるとする．このとき，

$$G(T) = \{[u, T(u)] : u \in D(T)\} \quad (\subset X \times Y)$$

を T の**グラフ**という．

グラフ $G(T)$ は $X \times Y$ の部分空間になっている．実際，$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ と $u, v \in D(T)$ に対して

$$\alpha[u, T(u)] + \beta[v, T(v)] = [\alpha u + \beta v, T(\alpha u + \beta v)]$$

である．

さて，逆に $X \times Y$ のどのような部分空間が，ある線形作用素のグラフになっているのだろうか．これについては，次の条件がある．

命題 8.7　部分空間 $G \subset X \times Y$ が

$$[0, v] \in G \implies v = 0 \tag{8.9}$$

を満たすならば，G は X から Y へのある線形作用素のグラフになっている．

証明 まず

$$D = \{u \in X : \text{ある } v \in Y \text{ が存在し，} [u, v] \in G\}$$

と定義する．$u \in D$ のとき，ある $v \in Y$ で $[u, v] \in G$ なるものが存在する．もし，$v' \in Y$ も $[u, v'] \in G$ を満たしているとする．このとき，

$$[0, v - v'] = [u, v] - [u, v'] \in G$$

であるから，条件 (8.9) により，$v = v'$ でなければならない．そこで，$T(u) = v$ とすれば，T は D を定義域とする X から Y への線形作用素で，そのグラフが G であることが容易に証明できる． □

X, Y が有限次元の場合，X から Y への線形作用素のグラフはいつでも閉集合になっている (なぜか?)．しかし，無限次元の場合はそうでない線形作用素がたくさんある．そのため，次のような定義が意味をもってくる．

定義 8.6 T を X から Y への線形作用素とする．T のグラフ $G(T)$ が $X \times Y$ の閉部分空間になっているとき，T は**閉**であるという．あるいは T は**閉線形作用素**であるという．

以下では線形でない作用素は扱わないので，**閉作用素**といったら閉線形作用素を表すものとする．

閉作用素の特徴づけとして次のものは有用である．

命題 8.8 T を X から Y への線形作用素であるとする．このとき，次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) T は閉作用素である．

(ii) $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $u \in X$, $v \in Y$ が

$$\|u_n - u\|_X \to 0 \ (n \to \infty), \qquad \|T(u_n) - v\|_Y \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たすならば，$u \in D(T)$ であり，かつ $T(u) = v$ である．

証明 $G(T)$ が $X \times Y$ の閉集合であるとは，その定義によれば，$[u_n, T(u_n)] \in G(T)$ が，ある $[u, v] \in X \times Y$ に収束，すなわち，

$$\big\|[u_n, T(u_n)] - [u, v]\big\|_{X \times Y} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるならば，$[u, v] \in G(T)$ となることである．(8.8) より，(ii) は実際この主張のいい換えにすぎない． □

閉作用素の例をいくつかあげる．

▶ **例 5** T を X から Y への連続線形作用素とする．このとき，T は閉作用素になっている．

証明　$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X(= D(T))$, $u \in X$, $v \in Y$ であり，$\|u_n - u\|_X \to 0$, $\|T(u_n) - v\|_Y \to 0$ $(n \to \infty)$ であるとする．このとき，

$$\|T(u) - v\|_Y \leqq \|T(u) - T(u_n)\|_Y + \|T(u_n) - v\|_Y \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．ゆえに $T(u) = v$. したがって，命題 8.8 により，T は閉作用素であることがわかる．□

▶ **例 6 (超関数に作用する微分作用素)**　偏微分作用素は，その定義域をどのようにとるかで，L^2 における閉作用素になったり，ならなかったりする．ここでは，閉作用素になるような定義域を一つ定めておく．

$$P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \qquad (a_\alpha \in \mathbf{C})$$

なる m 階の偏微分作用素を考える．$u \in L^2(\mathbf{R}^d)$ を超関数 $F_u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と同一視して，

$$P(u) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F_u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$$

と定義する．一般に $P(u)$ は超関数であるが，もしもある $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ が存在し，$P(u) = F_f$ が成り立つ場合，このことを $P(u) \in L^2(\mathbf{R}^d)$ あるいは $Pu \in L^2(\mathbf{R}^d)$ と表す．さらに，このとき $Pu \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ と f とを同一視して考えることにする．□

命題 8.9　$X = L^2(\mathbf{R}^d)$ とし，

$$D = \{u \in L^2(\mathbf{R}^d) \,:\, Pu \in L^2(\mathbf{R}^d)\}$$

とおく．このとき，

$$\widetilde{P}(u) = P(u) \qquad (u \in D)$$

により，$D(\widetilde{P}) = D$ とする $L^2(\mathbf{R}^d)$ から $L^2(\mathbf{R}^d)$ への線形作用素 $\widetilde{P}$ を定義する．このとき，$\widetilde{P}$ は $L^2(\mathbf{R}^d)$ における閉作用素になっている．

証明　$u_n \in D(\widetilde{P})$, $u, v \in X$, かつ

$$\|u_n - u\|_2 \to 0, \quad \|\widetilde{P}(u_n) - v\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

を満たすものとする．このとき，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|\langle \widetilde{P}(u_n), \varphi\rangle - \langle P(u), \varphi\rangle| &= |\langle P(u_n - u), \varphi\rangle| \\
&= \left| \left\langle F_{u_n - u}, \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi \right\rangle \right| \\
&= \left| \int (u_n - u) \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi \, dx \right| \\
&\leqq \|u_n - u\|_2 \left\| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi \right\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

また,

$$
|\langle \widetilde{P}(u_n), \varphi\rangle - \langle F_v, \varphi\rangle| \leqq \|\widetilde{P}(u_n) - v\|_2 \, \|\varphi\|_2 \to 0 \qquad (n \to \infty).
$$

ゆえに, $P(u) = F_v$ より $P(u) \in L^2(\mathbf{R}^d)$ である. したがって, $u \in D(\widetilde{P})$ かつ $\widetilde{P}(u) = v$ となる. □

解析したい作用素がいつも閉作用素になっているとは限らない. しかし, その場合でも, 作用素を適当に拡張して閉作用素にできることがある. たとえば, 命題 8.9 で考えた閉作用素は, 偏微分作用素を閉作用素になるように拡張したものである. 一般の線形作用素の閉拡張について述べておこう.

定義 8.7 (閉拡張) T を X から Y への線形作用素とする. T が**可閉**であるとは, X から Y へのある閉作用素 S が存在し, $T \subset S$ となることである. S を T の一つの**閉拡張**という.

一般に, T が可閉であるかどうかを判定する方法として次のものはよく使われる.

命題 8.10 T を X から Y への線形作用素とする. 次の (i), (ii) は互いに同値である:

(i) T は可閉である.

(ii) $u_n \in D(T)$, $v \in Y$, $\|u_n\|_X \to 0$ $(n \to \infty)$, $\|T(u_n) - v\|_Y \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば $v = 0$.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $T \subset S$ なる閉作用素 S が存在するならば,

$$
u_n \in D(T) \subset D(S), \qquad \|u_n\|_X \to 0,
$$

$$
\|S(u_n) - v\|_Y = \|T(u_n) - v\|_Y \to 0 \qquad (n \to \infty)
$$

より $v = S(0) = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $[0, v] \in \overline{G(T)}$ とすると，ある $[u_n, T(u_n)] \in G(T)$ が存在し，

$$\|u_n\|_X + \|T(u_n) - v\|_Y \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

である．(ii) の条件より，$v = 0$ となる．命題 8.7 より，X から Y へのある線形作用素 $\widetilde{T}$ で $\overline{G(T)} = G(\widetilde{T})$ となるものが存在する．明らかに，$\widetilde{T}$ は T の一つの閉拡張になっている． □

定義 8.8 T を X から Y への可閉作用素とする．このとき，命題 8.10 の証明に現れた閉作用素 $\widetilde{T}$ を T の**閉包**という．T の閉包をしばしば $\overline{T}$ と表す．

練習問題 1 T の閉包 $\overline{T}$ は T の最小な閉拡張であることを証明せよ．すなわち，S を T のひとつの閉拡張とするとき，$\overline{T} \subset S$ であることを証明せよ．

練習問題 2 T を X から Y への閉作用素とし，S を $D(S) = X$ なる X から Y への連続線形作用素とする．このとき，

$$D(S+T) = D(T), \quad (T+S)(u) = T(u) + S(u) \qquad (u \in D(T))$$

によって定義される作用素 $T + S$ は閉作用素であることを証明せよ．

8.6 閉作用素の逆作用素

本節では閉作用素の逆作用素について述べる．

定義 8.9 (可逆性) T を X から Y への線形作用素とする．T が**可逆**であるとは，Y から X へのある線形作用素 S で，$D(S) = R(T)$, $R(S) = D(T)$ であり，しかも

$$T(S(u)) = u \quad (u \in D(S)), \qquad S(T(v)) = v \quad (v \in D(T))$$

を満たすものが存在することである．以下に示すように，このような S はもし存在するならばただ一つに限ることがわかる．この S を T の**逆作用素**といい，T^{-1} で表す．

命題 8.11 定義 8.9 の S はもし存在すれば一意的に定まる．

証明 S' を定義 8.9 を満たす作用素とすると，$u \in D(S) = R(T) = D(S')$ に対して

$$S(u) = S\left(T\left(S'(u)\right)\right) = S'(u).$$ □

逆作用素のグラフについて調べるとき，次の共役グラフの記号は便利である．

T を X から Y への線形作用素とするとき，

$$G'(T) = \{[Tu, u] : u \in D(T)\} \qquad (\subset Y \times X)$$

を T の**共役グラフ**という．

命題 8.12 X から Y への線形作用素 T が可逆であるとき，$G(T) = G'(T^{-1})$ である．

証明
$$G(T) = \{[u, T(u)] : u \in D(T)\} = \{[T^{-1}(T(u)), T(u)] : u \in D(T)\}$$
$$= \{[T^{-1}(v), v] : v \in R(T) = D(T^{-1})\} = G'(T^{-1}).$$
□

系 8.13 T を X から Y への閉作用素で可逆であるとする．このとき，T^{-1} も閉作用素になっている．

証明 命題 8.12 より，$G'(T^{-1})$ は $X \times Y$ の閉集合である．したがって，明らかに $G(T^{-1})$ は $Y \times X$ の閉集合になっている． □

次に，合成作用素の逆作用素について述べておこう．

定義 8.10 (合成作用素) S, T を X から X への線形作用素とする．

$$D(S \circ T) = \{u \in D(T) : T(u) \in D(S)\}$$

と定め，$u \in D(S \circ T)$ に対して $(S \circ T)(u) = S(T(u))$ と定義する．記述を簡略にするためしばしば $ST = S \circ T$ と記す．

定理 8.14 S, T を X から X への線形作用素とする．S も T も可逆であるとすると，$S \circ T$ も可逆で，次式が成り立つ:

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}.$$

証明 $A = T^{-1} \circ S^{-1}, B = S \circ T$ とおく．まず，$D(A) = R(B)$ を示す．$u \in D(A)$ とすると，$T^{-1} \circ S^{-1}(u) \in R(T^{-1}) = D(T)$．ゆえに，

$$T(T^{-1} \circ S^{-1}u) = S^{-1}u \in R(S^{-1}) = D(S).$$

したがって，$S \circ T \circ (T^{-1} \circ S^{-1}u) = u$ である．これより，$u \in R(B)$ がわかる．

一方，$u \in R(B)$ とすると，ある $v \in D(B)$ で $u = (S \circ T)v$ なるものが存在する．$u \in R(S) = D(S^{-1})$ であるから，$S^{-1}u = Tv \in R(T) = D(T^{-1})$．これより，$u \in D(A)$ である．

以上より，$D(A) = R(B)$ かつ $u \in D(A)$ ならば $Au \in D(B)$ であり，$B \circ Au = u$ となることがわかる．

同様の考察で，$R(A)=D(B)$ かつ $u\in D(B)$ に対して，$(T^{-1}\circ S^{-1})\circ(S\circ T)u=u$ も示すことができる．よって，定理が証明された． □

S, T が X 上の連続線形作用素であるときは，S, T ともに X 全体で定義されているので，つねに $S\circ T, T\circ S$ が定義される．さらに次のこともわかる．

定理 8.15 S, T を X 上の連続線形作用素とすると，

$$\|T\circ S\| \leqq \|T\|\,\|S\|$$

である．

証明 証明は容易である：

$$\|T\circ S\| = \sup_{\|u\|_X\leqq 1}\|T(S(u))\| \leqq \sup_{\|u\|_X\leqq 1}\|T\|\,\|S(u)\| \leqq \|T\|\,\|S\|.$$ □

8.7 自己共役作用素，ユニタリー作用素

随伴行列に対応するものとして，線形作用素 T の随伴作用素を定義する．ところで，解析学では，随伴作用素という言葉よりも共役作用素ということが多く，本書でも共役作用素という用語を採用する．随伴行列は行列の各成分の複素共役をとって転置すればよかったが，一般の線形作用素ではそうはいかない．そこで，随伴行列のもつ性質 (8.2) を使って共役作用素を定義する．この場合も共役作用素の定義域には十分注意を払わなければならない．

以下，$(X, (\ ,\ ))$ を $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間とし，$\|u\|=(u,u)^{1/2}$ とする．

定義 8.11 T を X 上の線形作用素で，その定義域 $D(T)$ は X で稠密であるとする．

$$D(T^*)=\left\{ v\in X:\ \begin{array}{l}\text{ある } w\in X \text{ が存在し，すべての } u\in D(T)\\ \text{に対して } (T(u),v)=(u,w) \text{ となる．}\end{array}\right\}$$

とおく．後述の命題 8.16 で証明するように，w は存在するならば v によって一意的に決まる．そこで，$v\in D(T^*)$ に対して $T^*(v)=w$ と定め，T^* を T の**共役作用素**という．

命題 8.16 T は定義 8.11 における線形作用素とし，$v\in D(T^*)$ とする．もし，ある $w_1, w_2\in X$ が存在し，すべての $u\in D(T)$ に対して

$$(T(u),v)=(u,w_1)=(u,w_2)$$

を満たすならば，$w_1 = w_2$ となる．

証明 $w = w_1 - w_2$ とおく．このとき，$w = 0$ を示せばよい．T の仮定から $w \in X = \overline{D(T)}$ であるので，ある $u_n \in D(T)$ で $\|u_n - w\| \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する．$(u_n, w) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ である．したがって，

$$\|w\|^2 = (w, w) = \lim_{n\to\infty} (u_n, w) = 0$$

である．よって，$w = 0$ を示すことができた． □

これで，$\overline{D(T)} = X$ なる線形作用素 T に対して，共役作用素 T^* が定義された．

ここで，T^* の基本的な性質をあげておこう．

命題 8.17 T を $\overline{D(T)} = X$ なる X 上の線形作用素とする．このとき次の (1)–(4) が成り立つ:

(1) T^* は $D(T^*)$ を定義域とする X 上の線形作用素である．

(2) $u \in D(T), v \in D(T^*)$ に対して

$$(T(u), v) = (u, T^*(v)).$$

(3) T^* は閉作用素である．(T 自身には閉作用素であることは仮定していないことに注意．)

(4) T が $D(T)$ から X への連続線形作用素ならば，$D(T^*) = X$ であり，T^* は X 上の連続線形作用素となる．さらに，$\|T^*\| = \|T\|$ が成り立つ．

証明 (1) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$, $v_1, v_2 \in D(T^*)$ とする．任意の $u \in D(T)$ に対して

$$\begin{aligned}(T(u), \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \overline{\alpha_1}(T(u), v_1) + \overline{\alpha_2}(T(u), v_2) \\ &= \overline{\alpha_1}(u, T^*(v_1)) + \overline{\alpha_2}(u, T^*(v_2)) = (u, \alpha_1 T^*(v_1) + \alpha_2 T^*(v_2)).\end{aligned}$$

ゆえに，$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in D(T^*)$ となり，$D(T^*)$ が線形空間であることがわかる．また

$$(T(u), \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (u, \alpha_1 T^*(v_1) + \alpha_2 T^*(v_2))$$

であるから，

$$T^*(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T^*(v_1) + \alpha_2 T^*(v_2)$$

がわかる．ゆえに T^* は $D(T^*)$ を定義域とする X 上の線形作用素になっている．

(2) は，T^* の定義から明らかであろう．

(3) を証明する．$[v_n, T^*(v_n)] \in G(T^*)$ が，$X \times X$ においてある $[v, w] \in X \times X$ に収束しているとする．このとき，任意の $u \in D(T)$ に対して

$$(T(u), v_n) = (u, T^*(v_n))$$

であるが，ここで $n \to \infty$ とすると，左辺は $(T(u), v)$ に収束し，右辺は (u, w) に収束する．したがって，$(T(u), v) = (u, w)$ が任意の $u \in D(T)$ に対して成り立つので，定義より $[v, w] = [v, T^*(v)] \in G(T^*)$ となり，$G(T^*)$ は閉集合であることがわかる．

(4) 任意の $v \in X$ をとり，

$$\varphi(u) = (T(u), v) \qquad (u \in D(T))$$

とする．T が $D(T)$ 上で連続であるから，

$$|\varphi(u)| \leqq \|T(u)\| \, \|v\| \leqq \|T\| \, \|u\| \, \|v\|$$

が成り立つ．したがって φ は $D(T)$ から $\mathbf{C}$ への連続線形作用素で，$\|\varphi\| \leqq \|T\| \, \|v\|$ を満たす．

まず，φ は作用素ノルムを変えずに X 全体を定義域とする連続線形汎関数に一意的に拡張できることを示しておく．$u \in X$ とすると，ある $u_n \in D(T)$ で，$\|u_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすものが存在する．したがって，

$$|\varphi(u_n) - \varphi(u_m)| \leqq \|\varphi\| \, \|u_n - u_m\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

である．$\mathbf{C}$ の完備性から，ある $a \in \mathbf{C}$ が存在し，$|\varphi(u_n) - a| \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．この a は，じつは u の近似列 $\{u_n\}$ のとり方に依存しない．たとえば $u'_n \in D(T)$ が $\|u'_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすとすると，同様の議論で，ある $a' \in \mathbf{C}$ で $|\varphi(u'_n) - a'| \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものが存在することがわかる．しかし

$$\begin{aligned}
|a - a'| &\leqq |a - \varphi(u_n)| + |\varphi(u_n) - \varphi(u'_n)| + |\varphi(u'_n) - a'| \\
&\leqq |a - \varphi(u_n)| + \|\varphi\| \, \|u_n - u'_n\| + |\varphi(u'_n) - a'| \\
&\leqq |a - \varphi(u_n)| + \|\varphi\| \, \|u_n - u\| + \|\varphi\| \, \|u - u'_n\| + |\varphi(u'_n) - a'| \\
&\to 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

である．そこで $\widetilde{\varphi}(u) = a$ と定める．$u \in D(T)$ の場合は，$u_n = u$ とすれば $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$，$\lim_{n\to\infty} |\varphi(u_n) - \varphi(u)| = 0$ より，$\widetilde{\varphi}(u) = \varphi(u)$ が成り立つ．また，任意の $u \in X$ に対して，$u_n \in D(T)$ を $\|u_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ とすると $\lim_{n\to\infty} |\varphi(u_n) - \widetilde{\varphi}(u)| = 0$ であるから

$$|\widetilde{\varphi}(u)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi(u_n)| \leqq \|\varphi\| \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|\varphi\| \, \|u\|$$

が成り立つ．したがって $\|\widetilde{\varphi}\| \leqq \|\varphi\|$ であり，$\widetilde{\varphi}$ は X 上の連続線形作用素になっている．また，明らかに $\|\varphi\| \leqq \|\widetilde{\varphi}\|$ であるから，

$$\|\varphi\| = \|\widetilde{\varphi}\|$$

が成り立つ．この $\widetilde{\varphi}$ を φ の X への連続的な拡張という．φ の X への連続的な拡張は一意的に定まることは容易に示せるので証明は読者にまかせる．

さて，$\widetilde{\varphi} \in X^*$ であるから，リースの定理より，ある $w \in X$ で

$$\widetilde{\varphi}(u) = (u, w) \qquad (u \in X),$$

$$\|w\| = \|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$$

を満たすものが存在する．特に，$u \in D(T)$ の場合は

$$(T(u), v) = \varphi(u) = \widetilde{\varphi}(u) = (u, w)$$

であるから，$v \in D(T^*)$ である．すなわち $D(T^*) = X$ となっている．また，

$$\|T^*(v)\| = \|w\| = \|\varphi\| \leqq \|T\|\,\|v\|$$

より T^* は X 上の連続線形作用素で，$\|T^*\| \leqq \|T\|$ を満たす．一方，(2) において v として $T(u)$ を考えると

$$\begin{aligned}\|T(u)\|^2 &= (T(u), T(u)) = (u, T^*(T(u))) \\ &\leqq \|u\|\,\|T^*(T(u))\| \leqq \|u\|\,\|T^*\|\,\|T(u)\|\end{aligned}$$

である．これより $\|T(u)\| \leqq \|T^*\|\,\|u\|$，したがって $\|T\| \leqq \|T^*\|$ が得られる． □

エルミート行列は $A = A^*$ であることにより定義された．X 上の線形作用素 T に対して，エルミート作用素の一般化を自己共役作用素というが，それは次のように定義される．

定義 8.12 (自己共役作用素) T を $\overline{D(T)} = X$ なる X 上の線形作用素とする．$T = T^*$ が成り立つとき，T を**自己共役作用素**という．また，T 自身は自己共役とは限らないが，T が可閉であって，その閉包が自己共役になっているとき，T は**本質的自己共役作用素**であるという．

命題 8.17 (3) より，自己共役作用素は閉作用素である．

また，ユニタリー行列の無限次元版は次のように定義される．

定義 8.13 (ユニタリー作用素) U を $D(U) = X$ かつ $R(U) = X$ なる X 上の線形作用素とする．U が**ユニタリー**であるとは

$$\|U(u)\| = \|u\| \qquad (u \in X)$$

となることである．

X 上の線形作用素に対しても固有値を定義し，自己共役作用素とユニタリー作用素の固有値について調べておこう．

定義 8.14　T を X 上の線形作用素とする．$\lambda \in \mathbf{C}$ が T の**固有値**であるとは，ある $u \in D(T)$ $(u \neq 0)$ で

$$T(u) = \lambda u$$

を満たすものが存在することである．このとき，u を λ に関する T の**固有ベクトル**といい，λ に関するすべての固有ベクトルで生成される X の部分空間を λ に関する T の**固有空間**という．

特に，λ に関する T の固有空間 M が有限次元のベクトル空間であるとき，λ を T の**多重度有限の固有値**という．

線形作用素の固有値は一般には複素数であるが，自己共役作用素とユニタリー作用素の固有値は次の著しい性質をもっている．

定理 8.18　(1) T を自己共役作用素とすると，その固有値はもし存在するならば，必ず実軸 $\mathbf{R}$ 上にある．

(2) T をユニタリー作用素とすると，その固有値はもし存在するならば，必ず単位円周 $\mathbf{T}$ 上にある．

証明　(1) λ を固有値とし，u をその固有ベクトルとする．このとき，

$$\lambda\|u\|^2 = (\lambda u, u) = (T(u), u) = (u, T(u)) = (u, \lambda u) = \overline{\lambda}\|u\|^2$$

であるから，$\lambda = \overline{\lambda}$ となり，$\lambda \in \mathbf{R}$ である．

(2) $\|u\|^2 = (u, u) = (T(u), T(u)) = (\lambda u, \lambda u) = |\lambda|^2\|u\|^2$ より，$|\lambda| = 1$ でなければならない．　□

8.8　自己共役性の判定法

与えられた作用素 T が自己共役になっているかどうかは $T^* = T$ かどうかをみればよいわけであるが，それはしばしば難しい問題である．本節では，自己共役性の判定法をいくつか紹介する．

はじめに注意しておきたいのは，$T \subset T^*$ の証明はあまり難しくないことが多いということである．難しいのは，$T^* \subset T$ のほうの証明である．そこで，次のような定義をしておく．

定義 8.15　T が $\overline{D(T)} = X$ なる X 上の線形作用素で，$T \subset T^*$ を満たすとき，T は**対称作用素**であるという．

問題は，どのような条件のもとで対称作用素が自己共役になるかということである．この問題にとりかかるまえに，対称性の確認の仕方を紹介しておこう．

命題 8.19 T を $\overline{D(T)} = X$ なる X 上の線形作用素とする．このとき，次の (i), (ii) は同値である:

(i) T は対称作用素である．

(ii) 任意の $u, v \in D(T)$ に対して，$(T(u), v) = (u, T(v))$.

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 仮定より，

$$v \in D(T) \subset D(T^*), \qquad T(v) = T^*(v).$$

ゆえに $u \in D(T)$ に対して次が成り立つ:

$$(T(u), v) = (u, T^*(v)) = (u, T(v)).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 定義より，$v \in D(T)$ ならば $v \in D(T^*)$ で，$T^*(v) = T(v)$ であるから $T \subset T^*$ である． □

以下，対称作用素が自己共役になるためのさまざまな条件あげていく．まずは，やさしいものからはじめる．

命題 8.20 T を対称作用素とする．もし，$D(T^*) \subset D(T)$ ならば，T は自己共役作用素である．

証明 仮定より，$D(T^*) = D(T)$ となる．このとき，

$$T^*(u) = T(u) \qquad (u \in D(T) = D(T^*))$$

であるから，$T = T^*$ となる． □

以下，本書をとおして，I は恒等作用素 $I(u) = u$ を表すものとする．

定理 8.21 T を対称作用素とする．もし，ある $\lambda \in \mathbf{C}$ で

$$R(T - \lambda I) = R(T - \bar{\lambda} I) = X$$

となるものが存在するならば，T は自己共役作用素である．

証明 前命題より，$D(T^*) \subset D(T)$ を示せばよい．$v \in D(T^*)$ とする．このとき，すべての $u \in D(T)$ に対して

$$\begin{aligned}((T - \lambda I)u, v) &= (Tu, v) - \lambda(u, v) = (u, T^* v) - (u, \bar{\lambda} v) \\ &= (u, (T^* - \bar{\lambda} I)v)\end{aligned}$$

である．$R(T-\bar{\lambda}I)=X$ より，ある $w\in D(T)$ で

$$(T^*-\bar{\lambda}I)v=(T-\bar{\lambda}I)w$$

となるものが存在する．したがって，T の対称性から

$$(u,(T^*-\bar{\lambda}I)v)=(u,(T-\bar{\lambda}I)w)=((T-\lambda I)u,w)$$

となる．したがって，$((T-\lambda I)u,v-w)=0$ である．ゆえに，$R(T-\lambda I)=X$ より $v=w$ でなければならない．よって $v=w\in D(T)$ である． □

この定理の逆もある意味で成り立っており，それは自己共役作用素の解析に役に立つ．

定理 8.22 T を自己共役作用素とする．このとき，$\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ を満たすすべての $\lambda\in\mathbf{C}$ に対して

$$R(T-\lambda I)=X$$

となる．さらに，$T-\lambda I$ は可逆で，$(T-\lambda I)^{-1}$ は X 全体で定義された連続線形作用素になっている．

定理の証明のため，次の補題を準備しておく．以下では，線形作用素 S に対して $N(S)=\{u\in D(S):S(u)=0\}$ とする．

補題 8.23 A を対称作用素とし，$\mu\in\mathbf{C}$ とする．このとき，次の (1)–(3) が成り立つ:

(1) $(A-\mu I)^*=A^*-\bar{\mu}I$.

(2) $X=\overline{R(A-\mu I)}\oplus N(A^*-\bar{\mu}I)$.

(3) $\|(A-\mu I)u\|\geqq|\mathrm{Im}\,\mu|\,\|u\|\quad(u\in D(A))$.

証明 (1) の証明からはじめる．$v\in D(A^*)\,(=D(A^*-\bar{\mu}I))$ とする．任意の $u\in D(A)$ に対して

$$((A-\mu I)u,v)=(u,A^*v)-\mu(u,v)=(u,(A^*-\bar{\mu}I)v).$$

ゆえに $v\in D((A-\mu I)^*)$ であり，かつ $A^*-\bar{\mu}I\subset(A-\mu I)^*$ であることがわかる．逆に $v\in D((A-\mu I)^*)$ とすると，任意の $u\in D(A)$ に対して

$$\begin{aligned}(Au,v)&=((A-\mu I)u,v)+\mu(u,v)\\&=(u,(A-\mu I)^*v)+(u,\bar{\mu}v)=(u,[(A-\mu I)^*+\bar{\mu}I]v)\end{aligned}$$

となる．ゆえに，$v\in D(A^*)=D(A^*-\mu I)$ であり

$$A^*v=[(A-\mu I)^*+\bar{\mu}I]v,$$

すなわち $(A^* - \bar{\mu}I)v = (A - \mu I)^* v$ である．したがって，$(A - \lambda I)^* \subset A^* - \bar{\lambda}I$ である．

次に (2) を証明する．直交分解定理より $N(A^* - \bar{\mu}I) = \overline{R(A - \mu I)}^{\perp}$ を示せばよい．まず $v \in N(A^* - \bar{\mu}I)$ とする．任意の $u \in \overline{R(A - \mu I)}$ に対して，ある $z_n \in D(A)$ で $(A - \mu I)z_n \to u$ $(n \to \infty)$ となるものが存在するので，

$$(u, v) = \lim_{n\to\infty} ((A - \mu I)z_n, v) = \lim_{n\to\infty} (z_n, (A^* - \bar{\mu}I)v) = \lim_{n\to\infty} (z_n, 0) = 0$$

がわかる．ゆえに $v \in \overline{R(A - \mu I)}^{\perp}$ を示すことができた．今度は逆に $v \in \overline{R(A - \mu I)}^{\perp}$ とする．すると，任意の $u \in D(A)$ に対して

$$(u, (A^* - \bar{\mu}I)v) = ((A - \mu I)u, v) = 0,$$

かつ $\overline{D(A)} = X$ より $(A^* - \bar{\mu}I)v = 0$ となる．

最後に (3) を証明する．任意の $u \in D(A)$ に対して，$(Au, u) = (u, Au) = \overline{(Au, u)}$ より，$(Au, u) \in \mathbf{R}$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\|(A - \mu I)u\|^2 &= \|Au\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(Au, \mu u) + |\mu|^2\|u\|^2 \\ &= \|Au\|^2 - 2(\mathrm{Re}\,\mu)(Au, u) + |\mu|^2\|u\|^2. \qquad (8.10)\end{aligned}$$

ここで，

$$2|\,\mathrm{Re}\,\mu||(Au, u)| \leqq 2|\,\mathrm{Re}\,\mu|\|Au\|\|u\| \leqq \|Au\|^2 + |\,\mathrm{Re}\,\mu|^2\|u\|^2$$

であるから，

$$\|(A - \mu I)u\|^2 \geqq \|Au\|^2 - \|Au\|^2 - |\,\mathrm{Re}\,\mu|^2\|u\|^2 + |\mu|^2\|u\|^2 = |\,\mathrm{Im}\,\mu|^2\|u\|^2$$

がわかる． □

定理 8.22 の証明 $N(T^* - \bar{\lambda}I) = \{0\}$ である．なぜならば，$v \in N(T^* - \bar{\lambda}I)$ とすると，$T^*v = \bar{\lambda}v$ より

$$(\mathrm{Im}\,\bar{\lambda})\|v\|^2 = \mathrm{Im}(\bar{\lambda}v, v) = \mathrm{Im}(T^*v, v) = \mathrm{Im}(Tv, v) = 0$$

である (ただし最後の等式は，補題 8.23 (3) の証明中に示した $(Tu, u) \in \mathbf{R}$ であることを使って得られる)．ゆえに $\|v\| = 0$ でなければならない．このことと補題 8.23 (2) から

$$\overline{R(T - \lambda I)} = X$$

がわかる．さらに，以下に述べることから $\overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)$ もわかる: $v \in \overline{R(T - \lambda I)}$ とすると，ある $u_n \in D(T)$ で $(T - \lambda I)u_n \to v$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する．したがって，補題 8.23 (3) より

$$\|u_n - u_m\| \leqq \frac{1}{|\,\mathrm{Im}\,\lambda|}\|(T - \lambda I)(u_n - u_m)\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

を得る．X の完備性より，ある $u \in X$ で $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ なるものが存在する．こ

こで

$$Tu_n = (T - \lambda I)u_n + \lambda u_n \to v + \lambda u \qquad (n \to \infty)$$

となっていることに注意すると，T が閉作用素であることから

$$u \in D(T), \qquad Tu = v + \lambda u,$$

すなわち $(T - \lambda I)u = v$ である．ゆえに $v \in R(T - \lambda I)$, したがって，

$$R(I - \lambda I) = \overline{R(T - \lambda I)} = X.$$

次に，$T - \lambda I$ の可逆性を示す．補題 8.23 (3) より，$(T - \lambda I)u = (T - \lambda I)u'$ ならば $(T - \lambda I)(u - u') = 0$ であるから，$u - u' = 0$ となる．したがって，$T - \lambda I$ は $D(T)$ 上で 1 対 1 になっていることがわかる．さらにいま証明したことより $R(T - \lambda I) = X$ であり，しかも補題 8.23 (3) より

$$\|(T - \lambda I)^{-1}u\| \leqq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\|u\| \tag{8.11}$$

が得られる．よって定理が証明された． □

この定理の意味を述べておこう．一般に，X 上の線形作用素 T に対して $(T - \lambda I)^{-1}$ が X 上で定義された連続線形作用素になっているとき，$(T - \lambda I)^{-1}$ を T の λ に関する**レゾルベント**という．そしてレゾルベントが存在するような $\lambda \in \mathbf{C}$ 全体のなす集合を T の**レゾルベント集合**といい，$\rho(T)$ と表す．

レゾルベント集合は，作用素方程式とよばれる方程式に関連している．たとえば，X 上の線形作用素 T と複素数 λ を考える．このとき，任意に与えられた $f \in X$ に対して

$$(T - \lambda I)u = f$$

を満たすような $u \in D(T)$ がどのようなときみつけられるか，というのが典型的な**作用素方程式**の問題である．もし λ が T のレゾルベント集合に入っていれば，この作用素方程式は一意解 $u = (T - \lambda I)^{-1}f$ をもつのである．作用素方程式は微分方程式や積分方程式を抽象化したもので，それ自身興味深い研究対象である．

さて，定理 8.22 であるが，これは T が自己共役作用素であるならば，$\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ が T のレゾルベント集合に含まれることを主張したものである．それでは，実軸上の点はどうだろうか．この場合には，T のレゾルベント集合に含まれているときと，そうでないときがある．

ただし，T が連続線形作用素である場合には，次のような結果がある．

定理 8.24 T を X 上の連続線形作用素とし，λ を $\|T\| < |\lambda|$ を満たす複素数とする．このとき，$\lambda \in \rho(T)$ である．

証明 $S = (1/\lambda)T$ とおき，$S^n = S \circ \cdots \circ S$ (S の n 回合成) とする．仮定より $\|S\| < 1$ であるから，定理 8.15 により

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} S^k - \sum_{k=0}^{n} S^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} S^k \right\| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} \|S^k\| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} \|S\|^k \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

となる．ゆえに $\left\{ \sum_{k=0}^{m} S^k \right\}$ は $B(X)$ における作用素ノルムに関するコーシー列である．定理 8.4 より，作用素ノルムに関する極限

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} S^k \in B(X)$$

が存在する．さらに

$$Q \circ S = S \circ Q = \sum_{k=0}^{\infty} S^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k - I = Q - I$$

である．したがって，

$$(S - I) \circ (-Q) = (-Q) \circ (S - I) = I$$

となるから，$(S - I)^{-1} = -Q \in B(X)$ である．よって，

$$(T - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} Q \in B(X)$$

が存在することがわかる． □

さて，だいぶ話がそれてしまったが，再び自己共役性の判定法にもどろう．今度は，

自己共役作用素 + 対称作用素

がどのようなときに自己共役になるかを判定する方法を述べる．この形の作用素は，量子力学にシュレーディンガー作用素 $\Delta + V$ としてしばしば現れる (詳しくは次章で学ぶことにする)．このようなタイプの作用素の自己共役性は，特に量子力学の数学的研究では重要な研究テーマである．

次に述べるのは，有名な判定法である．

定理 8.25 (加藤・レーリッヒの定理) T を自己共役作用素とし，A を $D(T) \subset D(A)$ なる対称作用素とする．もし，ある $\delta \in [0, 1)$, $c \geqq 0$ を

$$\|Au\| \leqq \delta \|Tu\| + c\|u\| \qquad (u \in D(T)) \tag{8.12}$$

となるようにとることができるならば，$D(T + A) = D(T)$ として，$T + A$ は

自己共役作用素になっている.

証明　$T+A$ が対称作用素であることは, 命題 8.19 より容易にわかる. $T+A$ の自己共役性を示すために定理 8.21 を使う. $\rho \in \mathbf{R}$ で $|\rho|$ が十分大きなとき, $R(T+A-i\rho I) = X$ となることを示せば, $\overline{i\rho} = i(-\rho)$ であるから, $R(T+A-\overline{i\rho}I) = X$ でもあり, 定理 8.21 より $T+A$ の自己共役性が得られる.

T は自己共役であるから, 定理 8.22 より $(T-i\rho I)^{-1}$ は X 上で定義された連続線形作用素として存在する. さらに, (8.11) より

$$\|(T-i\rho I)^{-1}v\| \leqq \frac{1}{|\rho|}\|v\| \qquad (v \in X)$$

である. いま, $\mathrm{Re}(i\rho) = 0$ であるから, (8.10) により, 任意の $u \in D(T)$ に対して

$$\|(T-i\rho I)u\|^2 = \|Tu\|^2 + |\rho|^2\|u\|^2 \geqq \|Tu\|^2.$$

ゆえに, $R((T-i\rho I)^{-1}) = D(T-i\rho I) = D(T)$ であることに注意しておくと, 任意の $v \in X$ に対して

$$\|T\circ(T-i\rho I)^{-1}v\|^2 \leqq \|(T-i\rho I)\circ(T-i\rho I)^{-1}v\|^2 = \|v\|^2$$

となる. この不等式を使って次のことを証明する.

主張　任意の $v \in X$ に対して, 作用素方程式

$$\left[I + A(T-i\rho I)^{-1}\right] w = v$$

は一意的な解 $w \in X$ をもつ.

証明　定理の仮定 (8.12) より, $z \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|A\circ(T-i\rho I)^{-1}z\| &\leqq \delta\|T\circ(T-i\rho I)^{-1}z\| + c\|(T-i\rho I)^{-1}z\| \\ &\leqq \delta\|z\| + \frac{c}{|\rho|}\|z\| \\ &= \left(\delta + \frac{c}{|\rho|}\right)\|z\|. \end{aligned} \tag{8.13}$$

ここで, $|\rho|$ を十分大きくとれば, $\delta + c/|\rho| < 1$ とできる.

このとき, $\|A\circ(T-i\rho I)^{-1}\| < 1$ であるから, 定理 8.24 により主張の証明が完了する. □

引き続き定理 8.25 の証明をする. 任意に $v \in X$ をとる. 主張で得た $w \in X$ に対して $x = (T-i\rho I)^{-1}w \in D(T)$ とおくと,

$$\begin{aligned}(T+A-i\rho I)x &= (T-i\rho I)x + Ax \\ &= w + A\circ(T-i\rho I)^{-1}w = v.\end{aligned}$$

ゆえに $v \in R(T+A-i\rho I)$ となる. これで $R(T+A-i\rho I) = X$ が証明された. □

9 章

ソボレフ空間と偏微分作用素の本質的自己共役性

本章では，偏微分作用素を自己共役作用素の理論を使って研究するための準備として，いくつかの偏微分作用素の $L^2(\mathbf{R}^d)$ における本質的自己共役性について述べる．特に，本書ではラプラス作用素 Δ と，クーロンポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素を題材に，その本質的自己共役性を確認する．その際，ソボレフ空間とよばれる関数空間を使う．ソボレフ空間は現代解析学のさまざまなところで使われている重要な関数空間のひとつであるので，まずソボレフ空間の基礎的な性質を述べる．その後，ソボレフ空間に基づいた偏微分作用素の解析を行う．

9.1 ソボレフ空間

いくつかの定義からはじめる．

定義 9.1 $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d), \alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ とする．F が α 次の L^2 **導関数**をもつとは，ある $W \in L^2(\mathbf{R}^d)$ で，

$$D^\alpha F = F_W \tag{9.1}$$

を満たすものが存在することである．

この定義において，もし (9.1) を満たす W が存在するならば，a.e. の違いを除いてただ一つに限ることが，補足の補題 A.5 からわかる．また，F が α 次の L^2 導関数をもつとき，記号を簡単にするため (9.1) における W を $D^\alpha F$ で表すことにする．すなわち，

$$D^\alpha F = F_W = W$$

と表す．特に，$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ に対して $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ が α 次の L^2 導関数 $W \in L^2(\mathbf{R}^d)$ をもつとき，$D^\alpha f$ によって W を表す．この場合，

$$D^\alpha F_f = D^\alpha f = F_W = W$$

のような同一視をしている (このようにしておいても，混乱はおきないであろ

う). また $\|f\|_2$ を $\|F_f\|_2$ と書くこともある. これは, 超関数 F_f の L^2 ノルムを考えているのではなく, 便宜上 $\|F_f\|_2$ という記号により $\|f\|_2$ を表しているのである.

ソボレフ空間は, 次のように定義される. 非負整数 m に対して,

$$W^m(\mathbf{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R}^d) : \begin{array}{l} \text{任意の } |\alpha| \leqq m \text{ に対して,} \\ f \text{ は } \alpha \text{ 次の } L^2 \text{ 導関数 } D^\alpha f \text{ をもつ.} \end{array} \right\}.$$

ここで, $W^m(\mathbf{R}^d) \ni f, g$ に対して, 各 $D^\alpha f$, $D^\alpha g$ は L^2 の元なので

$$(f,g)_{2,m} = \sum_{|\alpha| \leqq m} \int_{\mathbf{R}^d} D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)}\, dx$$

とおくと, $(\ ,\ )_{2,m}$ は $W^m(\mathbf{R}^d)$ 上の内積になる.

$$\|f\|_{2,m} = \sqrt{(f,f)_{2,m}}$$

とおく. これは**ソボレフノルム**とよばれている.

はじめに, 微分できない点があるにもかかわらずソボレフ空間に属している関数の例をあげておこう.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x < 0) \\ -x+1 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

とする. このとき任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \partial F_f, \varphi \rangle &= -\int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi'(x)\, dx \\ &= -\int_{-1}^{0} (x+1)\varphi'(x)\, dx - \int_0^1 (-x+1)\varphi'(x)\, dx \\ &= -\big[(x+1)\varphi(x)\big]_{x=-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx \\ &\qquad - \big[(-x+1)\varphi(x)\big]_{x=0}^{1} - \int_0^1 \varphi(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx - \int_0^1 \varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

したがって，

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leqq x < 0) \\ -1 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

とすると，$g \in L^2(\mathbf{R})$ で，$\partial F_f = F_g$ を満たす．ゆえに f は 1 次の L^2 導関数をもっている．したがって $f \in W^1(\mathbf{R})$ である．

次のことが容易にわかる．

命題 9.1 ある $0 < C_{m,d} < \infty$ が存在し，すべての $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\|f\|_{2,m} \leqq \sum_{|\alpha| \leqq m} \|D^\alpha f\|_2 \leqq C_{m,d}\|f\|_{2,m}$$

が成り立つ．ただし，$C_{m,d}$ は m と d にのみ依存する定数である．

証明は容易であるので，各自試みるとよい．

定理 9.2 $W^m(\mathbf{R}^d)$ は $(\ ,\ )_{2,m}$ によって $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間になっている．

証明 $W^2(\mathbf{R}^d)$ の完備性を証明する．$\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset W^m(\mathbf{R}^d)$ をコーシー列，すなわち，

$$\|f_j - f_k\|_{2,m} \to 0 \qquad (j, k \to \infty)$$

とする．命題 9.1 より，任意の α $(|\alpha| \leqq m)$ に対して，

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_k\|_2 \to 0 \qquad (j, k \to \infty)$$

となっている．$L^2(\mathbf{R}^d)$ は完備であるから，ある $f^{(\alpha)} \in L^2(\mathbf{R}^d)$ で，

$$\|D^\alpha f_j - f^{(\alpha)}\|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

となるものが存在する．ただし $f = f^{(0)}$ とおく．任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}\int D^\alpha f_j(x)\varphi(x)\,dx &= \langle D^\alpha f_j, \varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle F_{f_j}, D^\alpha \varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int f_j(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

ここで $j \to \infty$ とすると，$\|D^\alpha f_j - f^{(\alpha)}\|_2 \to 0$ および $\|f_j - f\|_2 \to 0$ より，

$$\begin{aligned}\int f^{(\alpha)}(x)\varphi(x)\,dx &= (-1)^{|\alpha|}\int f(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx \\ &= \langle D^\alpha F_f, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

ゆえに，$D^\alpha F_f = F_{f^{(\alpha)}}$ となり，f は α 次の L^2 導関数 $D^\alpha f$ をもつ．したがって

$f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ である．また，各 α に対して

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f\|_2 = \|D^\alpha f_j - f^{(\alpha)}\|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

であることと，命題 9.1 より，$\|f_j - f\|_{2,m} \to 0$ $(j \to \infty)$ となる． □

ソボレフ空間の次の性質は本書で頻繁に使うものである．

定理 9.3 (1) $C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset W^m(\mathbf{R}^d)$.

(2) 任意の $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ に対して，ある $f_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ $(j = 1, 2, \dots)$ で，

$$\|f - f_j\|_{2,m} \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

となるものが存在する．

証明 (1) は明らかなので，(2) を示す．$\chi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ で $\int_{\mathbf{R}^d} \chi(x)\,dx = 1$ を満たすものとする．まず，$t > 0$ に対して $f * \chi_t \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \cap W^m(\mathbf{R}^d)$ であり，

$$\lim_{t \to 0} \|f - f * \chi_t\|_{2,m} = 0$$

となることを示す．$f * \chi_t \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ であることは系 3.17 で示した．$f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ より，$|\alpha| \leqq m$ に対して $D^\alpha f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ である．また，

$$\begin{aligned}
(D^\alpha f) * \chi_t(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} D^\alpha f(y) \chi_t(x - y)\,dy = \langle D^\alpha f, \chi_t(x - \cdot) \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle F_f, D^\alpha \chi_t(x - \cdot) \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^d} f(y) D_y^\alpha \chi_t(x - y)\,dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} f(y) D_x^\alpha \chi_t(x - y)\,dy \\
&= D_x^\alpha \int_{\mathbf{R}^d} f(y) \chi_t(x - y)\,dy \\
&= D^\alpha (f * \chi_t)(x).
\end{aligned}$$

したがって，定理 3.15 より

$$\|D^\alpha (f * \chi_t)\|_2 = \|(D^\alpha f) * \chi_t\|_2 \leqq \|D^\alpha f\|_2 \|\chi\|_1 < \infty$$

となるので，$f * \chi_t \in W^m(\mathbf{R}^d)$ である．$D^\alpha f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ より，定理 3.18 を用いて

$$\|D^\alpha (f - f * \chi_t)\|_2 = \|D^\alpha f - (D^\alpha f) * \chi_t\|_2 \to 0 \qquad (t \to 0)$$

が示せる．これより $\|f - f * \chi_t\|_{2,m} \to 0$ $(t \to 0)$ が得られる．

次に，$g \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \cap W^m(\mathbf{R}^d)$ に対して，$g_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で，$\|g - g_j\|_{2,m} \to 0$

$(j \to \infty)$ なるものが存在することを示す．$\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ を

$$0 \leqq \phi(x) \leqq 1 \quad (x \in \mathbf{R}^d), \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

を満たすようにとる．$\phi_j(x) = \phi((1/j)x)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ とおき，$g_j(x) = \phi_j(x)g(x)$ とおく．明らかに $g_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ である．補題 4.10 の証明より，

$$\begin{aligned} |D^\alpha(g - g_j)(x)| &\leqq (1 - \phi_j(x))\,|D^\alpha g(x)| + \frac{1}{j} \sum_{\substack{\beta \leqq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \left|D^\beta \phi\left(\frac{x}{j}\right)\right| \left|D^{\alpha-\beta} g(x)\right| \\ &\leqq c' \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|D^{\alpha-\beta} g(x)\right| \leqq c \sum_{\beta \leqq \alpha} \left|D^\beta g(x)\right|, \end{aligned}$$

ただしここで c', c は x に依存しない正定数である．$|x| < j$ のときは $g(x) - g_j(x) = 0$ であるから，

$$\left\|D^\alpha(g - g_j)\right\|_2^2 \leqq c^2 \int_{|x| \geqq j} \left(\sum_{\beta \leqq \alpha} \left|D^\beta g(x)\right|\right)^2 dx \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

となる．ゆえに $\|g - g_j\|_{2,m} \to 0$ $(j \to \infty)$ が成り立つ．

以上のことを合わせると，定理の証明ができる． □

9.2 フーリエ変換とソボレフ空間

本節では，ソボレフ空間をフーリエ変換を使って特徴づける．これにより，ソボレフ空間は一段と使いやすくなる．ソボレフノルムを特徴づける量として次のものを導入する:

$$p_m(f) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m \, |F[f](\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2},$$

$$q_m(f) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^{2m}) \, |F[f](\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}.$$

このとき，

$$2^{-m/2} p_m(f) \leqq q_m(f) \leqq p_m(f)$$

が成り立つ．なぜならば $(1 + |\xi|^{2m}) \leqq (1 + |\xi|^2)^m$ であり，かつ m 以下の正の整数 n に対して $|\xi|^{2n} \leqq 1 + |\xi|^{2m}$ より

$$(1 + |\xi|^2)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} |\xi|^{2n} \leqq 2^m (1 + |\xi|^{2m})$$

となるからである.

定理 9.4 $m = 0, 1, 2, \cdots$ とする.

(1) $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ が $p_m(f) < \infty$ を満たしているならば $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ であり,

$$\|f\|_{2,m} \leqq C_{m,d} p_m(f)$$

が成り立つ. ただしここで, $C_{m,d}$ は m, d にのみ依存する正定数である.

(2) $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ であれば, $p_m(f) < \infty$ であり,

$$c_{m,d} p_m(f) \leqq \|f\|_{2,m}$$

が成り立つ. ただしここで $c_{m,d}$ は m, d にのみ依存する正定数である.

証明 (1) 仮定より $|\alpha| \leqq m$ なる $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して $\xi^\alpha \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbf{R}^d)$ である. 超関数の意味で $\mathcal{F}[D^\alpha f] = \xi^\alpha \mathcal{F}[f]$ が成り立っているので, $\mathcal{F}[D^\alpha f]$ は $L^2(\mathbf{R}^d)$ の元と同一視できる. したがって, プランシュレルの定理 (定理 3.24) より, $D^\alpha f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[D^\alpha f]]$ も $L^2(\mathbf{R}^d)$ の元と同一視できる. ゆえに $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ である. さらに a.e. で次の不等式が成り立つ:

$$|\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi)|^2 \leqq \left|\xi^{2\alpha}\right| |\mathcal{F}[f](\xi)|.$$

ここで

$$\left|\xi^{2\alpha}\right| = \xi_1^{2\alpha_1} \cdots \xi_d^{2\alpha_d} \leqq \left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_d^2\right)^{|\alpha|} \leqq \left(1 + |\xi|^2\right)^m$$

より

$$\left\|D^\alpha f\right\|_2^2 = (2\pi)^{-d} \left\|\mathcal{F}[D^\alpha f]\right\|_2^2 \leqq (2\pi)^{-d} p_m(f)^2.$$

ゆえに (1) の不等式が成り立つ.

(2) 次の不等式が得られる:

$$\begin{aligned} q_m(f)^2 &= \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^{2m}) |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi + \int_{\mathbf{R}^d} \left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_d^2\right)^m |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leqq C \sum_{|\alpha| \leqq m} \int_{\mathbf{R}^d} |\xi^\alpha F[f](\xi)|^2 \, d\xi, \end{aligned}$$

ただし, ここで C は m, d にのみ依存する正定数である. これより (2) が成り立つ. □

$p_m(f)$ の定義そのものは, m が整数でなくとも可能である. すなわち, s を実数として,

$$p_s(f) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |F[f](\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2}$$

が定義できる．そこで $s \geqq 0$ の場合に

$$H^s(\mathbf{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R}^d) : p_s(f) < \infty \right\}$$

とおく．これを s 次の**ソボレフ空間**という．$p_s(f)$ はしばしば $\|f\|_{H^s}$ と表される．本書でも，以下では $\|f\|_{H^s}$ の記号のほうを用いることにする．定理 9.4 より，$m = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$H^m(\mathbf{R}^d) = W^m(\mathbf{R}^d),$$

$$c_{m,d} \|f\|_{H^m} \leqq \|f\|_{2,m} \leqq C_{m.d} \|f\|_{H^m}$$

が成り立っている．定義より明らかに $H^s(\mathbf{R}^d) \subset H^t(\mathbf{R}^d)$ $(t < s)$ が成り立っている．

ソボレフ空間に関する基本的で重要な定理のひとつは，ソボレフの埋め込み定理である．これを述べるために次の記号を準備しておく:

$$C_b^0(\mathbf{R}^d) = \left\{ f : f \text{ は } \mathbf{R}^d \text{ 上の有界な複素数値連続関数} \right\},$$

$$C_b^k(\mathbf{R}^d) = \left\{ f \in C^k(\mathbf{R}^d) : \text{任意の } \alpha \in \mathbf{Z}_+^d \ (|\alpha| \leqq k) \text{ に対して}, \partial^\alpha f \in C_b^0(\mathbf{R}^d) \right\}$$

とする．

定理 9.5 (ソボレフの埋め込み定理) k を非負の整数とする．$s > k + d/2$ とする．このとき任意の $f \in H^s(\mathbf{R}^d)$ に対して，ある $\widetilde{f} \in C_b^k(\mathbf{R}^d)$ が存在し，

$$f(x) = \widetilde{f}(x) \text{ a.e. } x \in \mathbf{R}^d$$

が成り立つ．また，$|\alpha| \leqq k$ なる $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して f の α 次の L^2 導関数と $\widetilde{f}$ の α 次の偏導関数も a.e. で一致する．

注意　この定理の結論の命題は，a.e. で一致する関数を同一視するという立場から，しばしば

$$H^s(\mathbf{R}^d) \subset C_b^k(\mathbf{R}^d)$$

と記述される．

証明　まず，$|\alpha| \leqq k$ なる $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ に対して，$\xi^\alpha \mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbf{R}^d)$ であることを証明する．$k - s < -d/2$ より

$$\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{k-s} d\xi < \infty$$

が得られる．この積分値を C と表す．前定理で示した不等式 $\left|\xi^{2\alpha}\right| \leqq (1 + |\xi|^2)^k$ とシュ

バルツの不等式より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} |\xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)|\, d\xi &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^{k/2} |\mathcal{F}[f](\xi)|\, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^{k/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2} |\mathcal{F}[f](\xi)|\, d\xi \\ &\leqq \left(\int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^{k-s} d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}[f](\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2} \\ &= C^{1/2} \|f\|_{H^s} < \infty\end{aligned}$$

が得られる．$\alpha = (0,\cdots,0)$ の場合を考えると，$\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbf{R}^d)$ であるから，定理 3.25 のあとの注意より $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ が成り立ち，またリーマン・ルベーグの補題より $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ は有界連続関数である．$\widetilde{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$ とおく．これが求める関数であることを示す．$k=0$ の場合はすでに証明されている．$k=1$ の場合に $\widetilde{f}$ が 1 階偏導関数をもち，それが有界連続であることを示す．$e_1 = (1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $e_d = (0,\cdots,0,1) \in \mathbf{R}^d$ とする．

$$\frac{1}{h}\left(\widetilde{f}(x+he_j) - \widetilde{f}(x)\right) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{h}\left(e^{i(x+he_j)\cdot\xi} - e^{ix\cdot\xi_j}\right)\mathcal{F}[f](\xi)\, d\xi$$

であるが，ここで

$$\frac{1}{h}\left(e^{i(x+he_j)\cdot\xi} - e^{ix\cdot\xi}\right) = i\xi_j e^{ix\cdot\xi}\int_0^1 e^{ith\xi_j}\, dt$$

であるから

$$\left|\frac{1}{h}\left(e^{i(x+he_j)\cdot\xi} - e^{ix\cdot\xi}\right)\right| |\mathcal{F}[f](\xi)| \leqq |\xi_j|\, |\mathcal{F}[f](\xi)|,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e^{i(x+he_j)\cdot\xi} - e^{ix\cdot\xi}\right) = i\xi_j e^{ix\cdot\xi}$$

が成り立っている．$k=1$ の場合は，$|\xi_j|\,|\mathcal{F}[f](\xi)|$ はルベーグ可積分であるから，ルベーグの収束定理より

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\widetilde{f}(x+he_j) - \widetilde{f}(x)\right) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} i\xi_j e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}[f](\xi)\, d\xi$$

が成り立っている．$|\xi_j|\,|\mathcal{F}[f](\xi)|$ のルベーグ可積分性から右辺は明らかに x の有界関数であるが，ルベーグの収束定理より x の連続関数であることもわかる．

以下同様にして，一般の k に対して，$\widetilde{f} \in C_b^k(\mathbf{R}^d)$ が証明できる．

$D^\alpha f$ を f の L^2 導関数とする．また，$D^\alpha \widetilde{f}$ により $\widetilde{f}$ の通常の意味での α 次偏導関数とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha f, \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \widetilde{f}, D^\alpha\varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^d}\widetilde{f}(x) D^\alpha\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^d} D^\alpha\widetilde{f}(x)\varphi(x)\, dx = \langle D^\alpha\widetilde{f}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

であるから，$D^\alpha f = D^\alpha \widetilde{f}$ が a.e. で成り立つことがわかる． □

本節の最後に，ソボレフ空間を用いてポアソン方程式 $\Delta u = f$ の解の滑らかさに関する考察をする．まず，$f \in H^{s+|\alpha|}(\mathbf{R}^d)$ ならば

$$\begin{aligned}\|D^\alpha f\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \left|\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \left|\xi^\alpha\right|^2 \left|\mathcal{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^{s+|\alpha|} \left|\mathcal{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi = \|f\|_{H^{s+|\alpha|}}^2 < \infty\end{aligned}$$

より $D^\alpha f \in H^s(\mathbf{R}^d)$ である．強楕円型偏微分作用素とよばれるクラスの偏微分作用素に対しては，ある意味でこの逆が成り立つ．ここでは特にラプラス作用素の場合にそれを証明する．

定理 9.6 $u \in L^2(\mathbf{R}^d)$ とする．$f \in H^s(\mathbf{R}^d)$ $(s \geqq 0)$ に対して，$\Delta u = f$ が超関数の意味で成り立つならば，すなわち，任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

が成り立つならば，$u \in H^{s+2}(\mathbf{R}^d)$ である．

特に $s > d/2$ であれば，ある $\widetilde{u} \in C^2(\mathbf{R}^d)$ で，$u(x) = \widetilde{u}(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ となるものが存在し，通常の偏微分の意味で $\Delta \widetilde{u} = f$ が成り立つ:

証明 $\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[\Delta u](\xi) = -|\xi|^2 \mathcal{F}[u](\xi)$ である．次の不等式が得られる:

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^{s+2}}^2 &= \int_{|\xi|\geqq 1} (1+|\xi|^2)^{s+2} \left|\mathcal{F}[u](\xi)\right|^2 d\xi + \int_{|\xi|<1} (1+|\xi|^2)^{s+2} \left|\mathcal{F}[u](\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leqq \int_{|\xi|\geqq 1} (1+|\xi|^2)^{s+2} \frac{1}{|\xi|^4} \left|\mathcal{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi + 2^{s+2} \int_{|\xi|<1} \left|\mathcal{F}[u](\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi|\geqq 1} (1+|\xi|^2)^s \left(\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2}\right)^2 \left|\mathcal{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi + 2^{s+2} \int_{|\xi|<1} \left|\mathcal{F}[u](\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leqq 4 \int_{|\xi|\geqq 1} (1+|\xi|^2)^s \left|\mathcal{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi + 2^{s+2} \int_{|\xi|<1} \left|\mathcal{F}[u](\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leqq 4 \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \left|\mathcal{F}[f](\xi)\right|^2 d\xi + 2^{s+2} \int_{\mathbf{R}^d} \left|\mathcal{F}[u](\xi)\right|^2 d\xi \\ &= 4\,\|f\|_{H^s}^2 + 2^{s+2} (2\pi)^d \|u\|_2^2 < \infty.\end{aligned}$$

これより $u \in H^{s+2}(\mathbf{R}^d)$ であり，残りの主張はソボレフの埋め込み定理による． □

9.3 ラプラス作用素の本質的自己共役性

本節では，ソボレフ空間を使ってラプラス作用素の本質的自己共役性について述べる．Δ を $\mathbf{R}^d$ 上のラプラス作用素とする．まずは，$D(\Delta) = C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ として考えてみよう．任意の $f, g \in D(\Delta)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(\Delta f, g)_2 &= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)\overline{g(x)}\,dx \\
&= -\sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\overline{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)}\,dx \\
&= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}}\,dx = (f, \Delta g)_2 \qquad (9.2)
\end{aligned}
$$

となるから，Δ は対称作用素である．しかし Δ は，このままでは自己共役作用素どころか閉作用素にすらなっていない．ところが，Δ を超関数の意味での微分と考え，Δ の定義域を $W^2(\mathbf{R}^d)$ にすると，Δ は自己共役になる (下記の定理 9.7 参照)．以下では，$D(\Delta) = C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ として考えたときの Δ と，$D(\Delta) = W^2(\mathbf{R}^d)$ としたときの Δ とを区別するため，後者を $\widetilde{\Delta}$ で表すことにする．すなわち，$\widetilde{\Delta}$ とは，$f \in W^2(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$
\widetilde{\Delta} f = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}
$$

と定義された作用素である．ただし，ここで $\partial^2 f/\partial x_j^2$ は L^2 導関数である．

定理 9.7 $\widetilde{\Delta}$ は，$D(\widetilde{\Delta}) = W^2(\mathbf{R}^d)$ とする $L^2(\mathbf{R}^d)$ における自己共役作用素である．

証明 まず，$\widetilde{\Delta}$ の対称性を証明する．任意に $u, v \in W^2(\mathbf{R}^d)$ をとると

$$
\|u_n - u\|_{2,2} \to 0, \quad \|v_n - v\|_{2,2} \to 0 \qquad (n \to \infty)
$$

となる $u_n, v_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ がとれる．したがって，(9.2) と同様の計算により，

$$
(\widetilde{\Delta} u, v)_2 = \lim_{n\to\infty} (\widetilde{\Delta} u_n, v_n)_2 = \lim_{n\to\infty} (u_n, \widetilde{\Delta} v_n)_2 = (u, \widetilde{\Delta} v)_2
$$

がわかる．

次に自己共役性を証明する．そのためには，命題 8.20 より $D(\widetilde{\Delta}^*) \subset W^2(\mathbf{R}^d)$ を示

せば十分である．そこで，$v \in D(\widetilde{\Delta}^*)$ をとる．定義より $v, \widetilde{\Delta}^* v \in L^2(\mathbf{R}^d)$ である．また，$T = \sum_{j=1}^{d} (\partial^2/\partial x_j^2)$ を超関数の意味での微分による作用素とする．任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle TF_v, \overline{\varphi} \rangle &= \langle F_v, \overline{\Delta\varphi} \rangle = (v, \Delta\varphi)_2 = (v, \widetilde{\Delta}\varphi)_2 \\ &= (\widetilde{\Delta}^* v, \varphi)_2 = \langle F_{\widetilde{\Delta}^* v}, \overline{\varphi} \rangle.\end{aligned}$$

ゆえに $TF_v = F_{\widetilde{\Delta}^* v}$ である．したがって，TF_v と $\widetilde{\Delta}^* v \in L^2(\mathbf{R}^d)$ を同一視できる．このことから $\mathcal{F}[TF_v] \in L^2(\mathbf{R}^d)$ であり，さらに $\mathcal{F}[TF_v] = |\xi|^2 \mathcal{F}[F_v]$ である．

さて，定理 9.4 により

$$\begin{aligned}C_2^{-1} \|v\|_{2,2}^2 &\leqq \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^4) |\mathcal{F}[v]|^2 \, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}[v]|^2 d\xi + \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}[TF_v]|^2 \, d\xi \\ &= (2\pi)^d \left(\|v\|_2^2 + \|TF_v\|_2^2 \right) < \infty\end{aligned}$$

であるから，$v \in W^2(\mathbf{R}^d)$ である． □

さらに次のことがわかる．

定理 9.8 Δ を $\mathbf{R}^d$ 上のラプラス作用素で，$D(\Delta) = C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ とみなしたものとする．このとき，Δ は本質的に自己共役であり，$\overline{\Delta}$ を Δ の閉包とすると，$\overline{\Delta} = \widetilde{\Delta}$ である．

証明 前定理より，$G(\widetilde{\Delta})$ ($\widetilde{\Delta}$ のグラフ) は閉集合であるから，$G(\Delta)$ の閉包 $\overline{G(\Delta)}$ を含む．したがって，$G(\widetilde{\Delta}) \subset \overline{G(\Delta)}$ を証明すればよい．$[u, \widetilde{\Delta}(u)] \in G(\widetilde{\Delta})$ とすると，$u \in D(\widetilde{\Delta}) = W^2(\mathbf{R}^d)$ より，ある $u_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で $\|u - u_n\|_{2,2} \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものがとれる．このとき，

$$\begin{aligned}\left\| [u, \widetilde{\Delta} u] - [u_n, \Delta u_n] \right\|_2^2 &= \|u - u_n\|_2^2 + \|\widetilde{\Delta}(u - u_n)\|_2^2 \\ &\leqq C \|u - u_n\|_{2,2}^2 \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるので，$[u, \widetilde{\Delta} u] \in \overline{G(\Delta)}$ である． □

定理 9.7, 9.8 と同様にして次のことも証明できる．証明は読者にまかせる．

定理 9.9
$$Pf = \frac{1}{i} \frac{df}{dx} \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}))$$

とする．このとき，P は $L^2(\mathbf{R})$ における本質的自己共役作用素である．実際，

Pf を L^2 導関数で考えることにより $W^1(\mathbf{R})$ 上の作用素とみなしたものを $\widetilde{P}$ で表すと，$\widetilde{P}$ は P の閉包で，しかも $L^2(\mathbf{R})$ 上の自己共役作用素になっている．

9.4 シュレーディンガー作用素の本質的自己共役性

本節では，量子力学で重要なシュレーディンガー作用素のなかから，主としてクーロンポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素をとりあげ，その本質的自己共役性について述べる．

量子力学は，知ってのとおり電子のような微視的粒子の世界を扱うことのできる物理学の理論である．応用例としてわざわざこのようなものを選んできたのは，歴史的にみて，フーリエ解析や関数解析学が量子力学と深く関係しているからである．たとえば，フーリエ解析と関数解析学は量子力学の数学的な側面の建設に大きく貢献してきたし，一方，量子力学の研究を発端にして，超関数の理論や，われわれがこれから述べる自己共役作用素のスペクトル理論が開発されてきたのである．

9.4.1 シュレーディンガー方程式

本項では，シュレーディンガー方程式について予備知識のない読者のために，シュレーディンガー方程式に関する簡単な解説をしておきたい[1]．

量子力学では，次のようなことが基本法則として認められている：

「粒子の速度が小さく相対論的効果を考えなくてもよい場合に話を限定し，1 個の粒子の運動だけを扱うことにする．この場合，ポテンシャル $V(x)$ から導かれる力の場 $\mathbf{F} = -\nabla V$ の中で運動する質量 m の粒子の振舞いを表す波動関数 $\psi(x,t)$ は，一般には次の**時間を含むシュレーディンガー方程式**

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\psi + V(x)\,\psi \tag{9.3}$$

の解として与えられる．」(小出昭一郎「量子力学 (I)」(改訂版)，裳華房，p.30 より)

ただし，$\hbar$ はプランク定数とよばれる正の定数を 2π で割ったものである[2]．

---

[1] 筆者は物理学の専門家ではなく，本来ならばこれは筆者の任ではないので，もし不明な点がある場合には，ぜひ量子力学のしかるべき教科書を参照していただきたい．

[2] $\hbar = h/(2\pi)$, $h = 6.6260755 \times 10^{-34}$ J$\cdot$ s.

ここで得られる波動関数 $\psi(x,t)$ は粒子の運動状態の情報を含む関数で，たとえば，時刻 t に $\psi(x,t)$ の状態にある粒子の位置測定をしたとき，点 x を含む微小領域 dx 内に粒子が見いだされる確率は，$|\psi(x,t)|^2\,dx$ に比例したものとして与えられる．特に

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\psi(x,t)|^2\,dx = 1 \tag{9.4}$$

となっている場合には，領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 内に粒子を見いだせる確率は

$$\int_\Omega |\psi(x,t)|^2\,dx$$

である．条件 (9.4) は ψ にずいぶん強い制限を課しているようであるが，もし，

$$I = \int_{\mathbf{R}^3} |\psi(x,t)|^2\,dx < \infty$$

であれば，$\Psi(x,t) = \psi(x,t)/I$ とおくことによって，

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\Psi(x,t)|^2\,dx = 1$$

を満たすシュレーディンガー方程式の解をつくることができる．この数学的な操作は関数の "規格化" とよばれるものである．

さて，話を数学にもどして，量子力学における数学的な問題のひとつを考えてみよう．それは m, V, および時刻 $t=0$ での状態 $u(x) \in L^2(\mathbf{R}^3)$ が与えられたとき，方程式 (9.3) に従う波動関数が，初期状態 u から時間が経つにつれてどのように変化しているかを調べることである．そのためには，(9.3) を満たし，かつ $\psi(x,0) = u(x)$ となる関数 ψ をみつけなければならない．この問題を，一般化フーリエ級数の考え方を使って調べてみよう．いま，

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + V(x)$$

とおく．$\mathcal{H}$ を**ポテンシャル V のシュレーディンガー作用素**という．ここで，$\mathcal{H}$ の固有値 λ_n とその固有関数 φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が得られ，さらに $\{\varphi_n\}$ が $L^2(\mathbf{R}^3)$ の正規直交基底をなしていると想定する (これはあくまでも想定にすぎない)．このとき，任意の $f \in L^2(\mathbf{R}^3)$ は

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)_2 \varphi_n$$

と一般化フーリエ級数展開できる．さらに，もし $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$ であれば，L^2

ノルム収束の意味で

$$\mathcal{H}f = \sum_n (f, \varphi_n)_2 \mathcal{H}\varphi_n = \sum_n \lambda_n (f, \varphi_n)_2 \varphi_n \tag{9.5}$$

となる.

そこで, $u \in L^2(\mathbf{R}^3)$ に対して

$$\psi_t = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\lambda_n t/\hbar}(u, \varphi_n)_2 \varphi_n$$

とおく. このとき $\psi_0 = u$ であり, 形式的な計算が可能であれば,

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t &= i\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\lambda_n t/\hbar}(u, \varphi_n)_2\varphi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e^{-i\lambda_n t/\hbar}(u, \varphi_n)_2\varphi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\lambda_n t/\hbar}(u, \varphi_n)_2\mathcal{H}\varphi_n \\
&= \mathcal{H}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\lambda_n t/\hbar}(u, \varphi_n)_2\varphi_n\right) \\
&= \mathcal{H}\psi_t
\end{aligned}$$

のようになる. すなわち ψ_t が求める方程式の解になっている.

しかしながら, この議論はこのままでは使えない. なぜならば, $\mathcal{H}$ に対して, いつでも正規直交基底になるような固有関数系が存在するとは限らないからである. たとえば, $V = 0$ の場合など固有値は存在しない (より正確には離散固有値が存在しないということ. 12.3 節参照). その打開策としてあげられるのが, 自己共役作用素に対するスペクトル分解という, ある意味で (9.5) を一般化した分解である (このことは次章以降で述べる). このスペクトル分解のおかげで, $\mathcal{H}$ が自己共役作用素であれば, 上記と同様の考えで (9.3) の解をつくることができるのである (12 章参照). ただ, 前節でラプラス作用素が素朴なとらえ方では自己共役になっていないことからもわかるように, $\mathcal{H}$ もそのままでは自己共役になっていない. そこで, 結局, $\mathcal{H}$ が本質的自己共役かどうかを調べることが数学的に必要になる.

本節では, 基本的な場合ではあるが, シュレーディンガー作用素の本質的自己共役性について述べる.

9.4.2 クーロンポテンシャルの場合

シュレーディンガー作用素 $\mathcal{H} = -(\hbar^2/2m)\Delta + V$ がどのようなときに本質的に自己共役になるかは，関数解析学の難しい問題として，加藤敏夫をはじめとする数学者により研究されてきた．本書では，主として $V(x) = -K|x|^{-1}$ (K は正定数) の場合を扱うことにする．たとえば m を電子の質量，$K = e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ (e は電気素量，ε_0 は真空の誘電率) とした場合，$\mathcal{H}$ は，原点に電荷 e の核があり，それから引力を受けて運動する電荷 $-e$ の電子に対するシュレーディンガー作用素になっている．ただし，ここで核の大きさと運動は無視している (詳しくは，[小出] 前掲書参照).

定理 9.10 (加藤の定理) $\alpha > 0$ を定数，$V_1 \in L^2(\mathbf{R}^3)$, $V_2 \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ とし，$V = V_1 + V_2$ とする．ただし V は実数値であるとする．そして

$$\mathcal{H}f = (-\alpha\Delta + V)f \qquad (f \in D(\mathcal{H}) = C_0^\infty(\mathbf{R}^3))$$

により，線形作用素 $\mathcal{H}$ を定義する．このとき，$\mathcal{H}$ は本質的に自己共役である．すなわち，$\mathcal{H}$ の閉包 H が $L^2(\mathbf{R}^3)$ における自己共役作用素になっている．さらに $D(H) = W^2(\mathbf{R}^3)$ である．

クーロンポテンシャル $-K|x|^{-1}$ はこの定理の条件を満たしている．なぜならば，

$$|x|^{-1} = |x|^{-1}\chi_{B(0,1)} + |x|^{-1}\chi_{\mathbf{R}^3\setminus B(0,1)} \in L^2(\mathbf{R}^3) + L^\infty(\mathbf{R}^3)$$

であるからである．ただし，ここで $B(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| < 1\}$ である．

定理 9.10 を証明するために，補題を二つ準備しておく．

補題 9.11 任意の $a > 0$ に対して，ある $b > 0$ が存在し，すべての $f \in W^2(\mathbf{R}^3)$ に対して，次式が成り立つ:

$$\|f\|_\infty \leqq a\|\widetilde{\Delta}f\|_2 + b\|f\|_2.$$

証明 $\lambda(\xi) = |\xi|^2$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty = \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f]\|_\infty &\leqq (2\pi)^{-3}\|\widehat{f}\|_1 \\ &\leqq C\|(1+\lambda)\mathcal{F}[f]\|_2 \\ &\leqq C\|\mathcal{F}[f]\|_2 + C\|\lambda\mathcal{F}[f]\|_2.\end{aligned}$$

ここで，f の代わりに $f_r(x) = f(r^{-1}x)$ $(r > 0)$ なる関数 f_r をあてはめると，

$$\|f_r\|_\infty \leqq C\|\mathcal{F}[f_r]\|_2 + C\|\lambda\mathcal{F}[f_r]\|_2 \tag{9.6}$$

となる．いま，$\mathcal{F}[f_r](\xi) = r^3\mathcal{F}[f](r\xi)$ であるから，

$$\|\mathcal{F}[f_r]\|_2 = r^{3/2}\|\mathcal{F}[f]\|_2 = (2\pi)^{3/2}r^{3/2}\|f\|_2,$$

$$\|\lambda\mathcal{F}[f_r]\|_2 = r^{-1/2}\|\lambda\mathcal{F}[f]\|_2 = r^{-1/2}\|\mathcal{F}[\widetilde{\Delta}f]\|_2 = (2\pi)^{3/2}r^{-1/2}\|\widetilde{\Delta}f\|_2,$$

$$\|f_r\|_\infty = \|f\|_\infty$$

である．これらを (9.6) に代入すれば，

$$\|f\|_\infty \leqq (2\pi)^{3/2}C\left\{r^{3/2}\|f\|_2 + r^{-1/2}\|\widetilde{\Delta}f\|_2\right\}$$

となる．ここで $r > 0$ として十分大きな数をとれば補題が証明される．□

補題 9.12　任意の $a > 0$ に対して，ある $b > 0$ が存在し，すべての $f \in W^2(\mathbf{R}^3)$ に対して次が成り立つ:

$$\|Vf\|_2 \leqq a\|\widetilde{\Delta}f\|_2 + b\|f\|_2.$$

証明　補題 9.11 より，任意の $a' > 0$ に対してある $b' > 0$ が存在し，

$$\|f\|_\infty \leqq a'\|\widetilde{\Delta}f\|_2 + b'\|f\|_2 \qquad (f \in W^2(\mathbf{R}^3))$$

が成り立っている．ゆえに，

$$\begin{aligned}\|Vf\|_2 &\leqq \|V_1f\|_2 + \|V_2f\|_2\\ &\leqq \|V_1\|_2\|f\|_\infty + \|V_2\|_\infty\|f\|_2\\ &\leqq \|V_1\|_2(a'\|\widetilde{\Delta}f\|_2 + b'\|f\|_2) + \|V_2\|_\infty\|f\|_2\\ &= a'\|V_1\|_2\|\widetilde{\Delta}f\|_2 + (b'\|V_1\|_2 + \|V_2\|_\infty)\|f\|_2. \qquad (9.7)\end{aligned}$$

したがって，a' を十分小さくとればよい．□

定理 9.10 の証明　$T = -\alpha\widetilde{\Delta}$ とおく．T は，定理 9.7 より，$D(T) = W^2(\mathbf{R}^3)$ とする $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上の自己共役作用素である．

$Bf = Vf$ $(f \in W^2(\mathbf{R}^3))$ とおくと，補題 9.12 より，B は $D(B) = D(T)$ とする対称作用素で，定理 8.25 (加藤・レーリッヒの定理) の仮定を満たしている．したがって，$Q = T + B$ は $D(Q) = W^2(\mathbf{R}^3)$ とする $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上の自己共役作用素である．

以下では，Q が $\mathcal{H}$ の閉包であることを示す．$\beta > 0$ を十分大きな実数とする．どのくらい大きくとるかはあとで決める．このとき，補題 9.12 より

$$\begin{aligned}\|Qf\|_2 + \beta\|f\|_2 &\leqq (\|Tf\|_2 + \|Bf\|_2) + \beta\|f\|_2\\ &\leqq c_1\|f\|_{2,2}\end{aligned}$$

となっている．また，これとは逆に次の不等式も得られる:

$$\|Qf\|_2 + \beta\|f\|_2 \geqq \|Tf\|_2 - \|Bf\|_2 + \beta\|f\|_2$$

$$\geqq \|Tf\|_2 - a\alpha^{-1}\|Tf\|_2 - b\|f\|_2 + \beta\|f\|_2$$
$$\geqq (1 - a\alpha^{-1})\|Tf\|_2 + (\beta - b)\|f\|_2.$$

ここで $1 - a\alpha^{-1} > 0$ となるように $a > 0$ を小さく選び，次に $\beta - b > 0$ となるように β を大きくとっておく．すると，

$$\|Qf\|_2 + \beta\|f\|_2 \geqq C_2(\|Tf\|_2 + \|f\|_2) \geqq C_3\|f\|_{2,2}$$

となるように，f に関係ない定数 C_2, C_3 をとることができる．以上のことをまとめると次の不等式が得られる：

$$C_3\|f\|_{2,2} \leqq \|Qf\|_2 + \beta\|f\|_2 \leqq C_1\|f\|_{2,2}. \tag{9.8}$$

$G(Q), G(\mathcal{H})$ をそれぞれ $Q, \mathcal{H}$ のグラフとする．なお，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ ならば $Q\varphi = \mathcal{H}\varphi$ であることに注意しておく．

任意の $(f, Qf) \in G(Q)$ をとる．$f \in W^2(\mathbf{R}^3)$ であるから，ある $f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が存在し，$\|f_n - f\|_{2,2} \to 0$ $(n \to \infty)$ である．(9.8) より

$$\beta\|f_n - f\|_2 + \|\mathcal{H}f_n - Qf\|_2 \leqq C_1\|f_n - f\|_{2,2} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となっている．したがって，

$$G(\mathcal{H}) \subset G(Q) \subset \overline{G(\mathcal{H})}$$

が得られる．さらに $G(Q)$ が閉集合であるから，$G(Q) = \overline{G(\mathcal{H})}$ である．よって $Q = H$ が示された． □

9.5 領域上のソボレフ空間

これまで $\mathbf{R}^d$ 上のソボレフ空間およびその応用について述べてきたが，本章の最後に，領域上のソボレフ空間についてもふれておきたい．これは偏微分方程式を研究する際には非常に重要な役割を果たすものである．

$\mathbf{R}^d$ の連結開集合のことを**領域**という．本節では，Ω を $\mathbf{R}^d$ の**空でない有界な領域 (すなわち** $\sup_{x\in\Omega}|x| < \infty$ **なる領域) とする**．$k = 1, 2, \ldots, \infty$ に対して

$$C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\mathbf{R}^d) : \mathrm{supp}(f) \subset \Omega\}$$

とおく．また，

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{f : f \text{ は } \overline{\Omega} \text{ のある開近傍上の } C^k \text{ 級関数}\}$$

とする．$m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $C_0^\infty(\Omega) \subset W^m(\mathbf{R}^d)$ である．ヒルベルト空間 $(W^m(\mathbf{R}^d), \|\cdot\|_{2,m})$ における $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包を $W_0^m(\Omega)$ で表す．このと

き，$W_0^m(\Omega)$ は $W^m(\mathbf{R}^d)$ の閉部分空間で，$f \in W_0^m(\Omega)$ ならば $f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ である．

命題 9.13
$$C_0^m(\Omega) \subset W_0^m(\Omega).$$

証明 $f \in C_0^m(\Omega)$ とする．$\omega \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ を $\omega(x) = 0$ $(|x| \geqq 1)$ かつ $\int_{\mathbf{R}^d} \omega(x)\,dx = 1$ となるようにとり，$\omega_t^*(x) = t^{-d}\omega(x/t)$ $(t > 0)$ とおく．$f_t = f * \omega_t^*$ とする．系 3.17 より $f_t \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ である．また，ω_t^* の定め方から，$\mathrm{supp}(f) \cap B(x, 2t) = \emptyset$ (ここで $B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^d : |x-y| < r\}$) を満たすような x に対しては $f_t(x) = 0$ である．ゆえに，$t > 0$ を十分小さくとれば，$\mathrm{supp}(f_t) \subset \Omega$ とできる．$W^m(\mathbf{R}^d)$ の定義より明らかに $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$ であるから，定理 9.3 の証明より $\|f - f_t\|_{2,m} \to 0$ $(t \to 0)$．よって $f \in W_0^m(\Omega)$ である．□

$W_0^m(\Omega)$ に対して，応用上きわめて重要な次のレーリッヒの定理が成り立つ．

定理 9.14 (レーリッヒの定理) $0 \leqq m < m'$ なる整数 m, m' を任意にとる．$\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset W_0^{m'}(\Omega)$ が $\sup_j \|f_j\|_{2,m'} < \infty$ を満たすとき，$\{f_j\}_{j=1}^\infty$ のある部分列 $\{f_{j'}\}_{j'=1}^\infty$ とある $f \in W_0^m(\Omega)$ が存在し，$\|f_{j'} - f\|_{2,m} \to 0$ $(j' \to \infty)$ となる．

証明 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で $\varphi(x) = 1$ $(x \in \overline{\Omega})$ を満たすものをとり固定する．$\mathrm{supp}(f_j) \subset \overline{\Omega}$ より $f_j = f_j\varphi$ であり，したがって $\widehat{f_j} = \widehat{f_j} * \widehat{\varphi}$ である．また $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ である．このとき，次の不等式が得られる:

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^{m'/2}|\widehat{f_j}(\xi)| &= (1+|\xi|^2)^{m'/2}|\widehat{f_j} * \widehat{\varphi}(\xi)| \\
&\leqq (1+|\xi|^2)^{m'/2}\int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{f_j}(\xi-\eta)|\,|\widehat{\varphi}(\eta)|\,d\eta \\
&\leqq 2^{m'/2}\int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{m'/2}|\widehat{f_j}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{m'/2}|\widehat{\varphi}(\eta)|\,d\eta \\
&\leqq 2^{m'/2}c'_{m',d}\|f_j\|_{2,m'}\|\varphi\|_{2,m'}. \qquad (c'_{m',d} \text{ は } m', d \text{ のみに依存する正定数})
\end{aligned}$$

同様にして，

$$(1+|\xi|^2)^{m'/2}|\partial_k\widehat{f_j}(\xi)| \leqq 2^{m'/2}\|f_j\|_{2,m'}\|x_k\varphi\|_{2,m'}$$

が得られる．したがって，$\{\widehat{f_j}\}_{j=1}^\infty$, $\{\partial_k\widehat{f_j}\}_{j=1}^\infty$ $(k = 1, \ldots, d)$ は $\mathbf{R}^d$ 上で一様有界，すなわち

$$\sup_j \sup_{\xi \in \mathbf{R}^d} |\widehat{f_j}(\xi)| < \infty, \qquad \sup_j \sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\partial_k\widehat{f_j}(\xi)| < \infty$$

となっている．ここで，$\{\widehat{f_j}\}_{j=1}^{\infty}$ の $\mathbf{R}^d$ での一様有界性とテイラーの定理より，

$$|\widehat{f_j}(\xi)-\widehat{f_j}(\eta)| \leqq C|\xi-\eta| \qquad (C \text{ は } \xi, \eta, j \text{ に依存しない定数}) \tag{9.9}$$

が成り立つ．ここでアスコリ・アルツェラの定理 ([杉浦 II, 定理 12.4 系] 参照) を使う．(9.9) は $\{\widehat{f_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が $\mathbf{R}^d$ 上で同程度連続であることを示している．したがって，アスコリ・アルツェラの定理から，$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{f_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ が存在し，$\{\widehat{f_{j'}}\}_{j'=1}^{\infty}$ は，ある $\mathbf{R}^d$ 上の連続関数に任意のコンパクト集合上で一様収束している．

さて，任意に $R>0$ をとり固定し，$B_R=\{x\in\mathbf{R}^d : |x|\leqq R\}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
c'^{-1}_{m,d}\|f_{j'}-f_{k'}\|_{2,m}^2 &\leqq \int_{B_R}(1+|\xi|^2)^m|\widehat{f_{j'}}(\xi)-\widehat{f_{k'}}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\quad + \int_{\mathbf{R}^d\setminus B_R}(1+|\xi|^2)^{m-m'}(1+|\xi|^2)^{m'}|\widehat{f_{j'}}(\xi)-\widehat{f_{k'}}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leqq \sup_{\eta\in B_R}|\widehat{f_{j'}}(\eta)-\widehat{f_{k'}}(\eta)|^2\int_{B_R}(1+|\xi|^2)^m\,d\xi \\
&\quad + c'_{m',d}(1+R^2)^{m-m'}\|f_{j'}-f_{k'}\|_{2,m'}.
\end{aligned}$$

ここで $\|f_{j'}-f_{k'}\|_{2,m'}\leqq 2\sup_j\|f_j\|_{2,m'}$ と $m-m'<0$ より，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分大きな $R>0$ をとれば，$(1+R^2)^{m-m'}\|f_{j'}-f_{k'}\|_{2,m'}<\varepsilon$ とできる．そうしておいて $j',k'\to\infty$ とすると，$\varlimsup_{j',k'\to\infty}\|f_{j'}-f_{k'}\|_{2,m}\leqq c'_{m,d}c'_{m',d}\varepsilon$ となる．ここで ε は任意であるから，$\lim_{j',k'\to\infty}\|f_{j'}-f_{k'}\|_{2,m}=0$ である．$W_0^m(\Omega)$ の完備性から求める結果が証明された． □

さて，Ω 上のソボレフ空間 $W_0^m(\Omega)$ は $C_0^m(\Omega)$ を含んでいるが，しかし境界の近くで 0 にならない関数は $W_0^m(\Omega)$ に含まれない．以下では，$C^m(\overline{\Omega})$ を部分空間として含むような少し広いソボレフ空間 $W^m(\Omega)$ を定義する．若干の記号を定めておきたい．

$f\in C^m(\Omega)$，あるいは $f\in W^m(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\|f\|_{2,m,\Omega}=\left(\sum_{|\alpha|\leqq m}\int_\Omega|\partial^\alpha f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \quad (\leqq\infty)$$

とおく．また，集合 $A\subset B\subset\mathbf{R}^d$ および B 上の関数 f に対して，$f|A$ により f を A に制限したもの，すなわち f の定義域を A に制限した関数を表すことにする．Ω 上のソボレフ空間 $W^m(\Omega)$ を次のように定義する:

$$W^m(\Omega)=\{f\in L^2(\Omega) : \text{ある } g\in W^m(\mathbf{R}^d) \text{ が存在し，} f=g|\Omega\}$$

$(m=1,2,\ldots)$. ただし，$L^2(\Omega)$ は Ω 上のルベーグ可測なルベーグ測度に関する 2 乗可積分関数全体のなす集合である．明らかに $W_0^m(\Omega) \subset W^m(\Omega)$ であるが，$W_0^m(\Omega) \neq W^m(\Omega)$ である．たとえば，$g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ を Ω 上では恒等的に 1 になるものとする．このとき，$g|\Omega \in W^m(\Omega)$ であるが $g \notin W_0^m(\Omega)$ である．

次に，$W^m(\Omega)$ 上にノルムを定義したい．まず次のことに注意しておこう．$g,h \in W^m(\mathbf{R}^d)$ で $g|\Omega = h|\Omega$ ならば，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\langle \partial^\alpha g, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle g, \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle h, \partial^\alpha\varphi\rangle = \langle \partial^\alpha h, \varphi\rangle \ (|\alpha| \leqq m) \quad (9.10)$$

である．この等式を使って $\partial^\alpha g(x) = \partial^\alpha h(x)$ a.e. $x \in \Omega$ となることが次のようにして証明できる．$w = \partial^\alpha g - \partial^\alpha h$ とおく．Ω の外側では $w=0$ とおきなおすことにより，$w \in L^2(\mathbf{R}^d)$ と考える．K を $K \subset \Omega$ なる任意の閉球とし，ψ_K を $\psi_K \in C_0^\infty(\Omega)$ で $\psi_K(x) = 1$ $(x \in K)$ なるものとする．任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\varphi\psi_K \in C_0^\infty(\Omega)$ である．ゆえに (9.10) より

$$\int_{\mathbf{R}^d} w(x)\psi_K(x)\cdot\varphi(x)\,dx = \int_\Omega w(x)\cdot\psi_K(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

すでに証明したように，$w(x)\psi_K(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ であるから，$w(x) = 0$ a.e. $x \in K$ である．Ω は Ω に含まれる可算個の閉球で覆うことができるので，$w(x) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ が得られる．

以上のことから，$g,h \in W^m(\mathbf{R}^d)$ で $f = g|\Omega = h|\Omega$ ならば，$\|g\|_{2,m,\Omega} = \|h\|_{2,m,\Omega}$ であることがわかる．そこで，

$$\|f\|_{W^m(\Omega)} = \|g\|_{2,m,\Omega} \quad (9.11)$$

と定義する．これは明らかに $W^m(\Omega)$ 上のノルムになっている．

さらに，ソボレフ空間 $W^m(\Omega)$ を扱うため**拡張作用素**とよばれる作用素を導入する．本書では，Ω の境界が滑らかな場合について述べる．そのため，若干の準備からはじめたい．

$B_R = \{x \in \mathbf{R}^d : |x| < R\}$ とし，$B_R^- = \{x = (x_1,\ldots,x_d) \in B_R : x_d \leqq 0\}$ とおく．Ω を $\mathbf{R}^d$ の有界領域とする．$b\Omega = \overline{\Omega}\setminus\Omega$ を Ω の**境界**という．Ω が C^∞ **級境界をもつ**とは，$\overline{\Omega}$ を被覆するような $\mathbf{R}^d$ のある有界な開集合族 $\{\Omega_j\}_{j=0}^N$ と，$j \geqq 1$ に対して $\overline{\Omega}_j$ のある開近傍から球 B_R の上への 1 対 1 の C^∞ 級写像 ψ_j が存在し，次の条件を満たすことである:

$$\overline{\Omega}_0 \subset \Omega, \quad \Omega_j \cap b\Omega \neq \emptyset \qquad (j=1,\ldots,N), \quad (9.12)$$

$$\psi_j^{-1} \text{ は } C^\infty \text{ 級}, \quad (9.13)$$

$$\psi_j(\Omega_j \cap \overline{\Omega}) = B_R^-, \tag{9.14}$$

$$\psi_j(\Omega_j \cap b\Omega) = \{x \in B_R^- \ : \ x_d = 0\}. \tag{9.15}$$

このとき，次の $\zeta_0, \ldots, \zeta_N \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ が存在することが知られている ([杉浦 II, p.89]):

$$\mathrm{supp}(\zeta_j) \subset \Omega_j \qquad (0 \leqq \zeta_j \leqq 1,\ x \in \mathbf{R}^d,\ j = 0, \ldots, N), \tag{9.16}$$

$$\sum_{j=0}^N \zeta_j(x) = 1 \qquad (x \in \overline{\Omega}). \tag{9.17}$$

練習問題 球 B_R は C^∞ 級境界をもつ有界領域であることを示せ.

以下，本節では Ω は C^∞ **級境界をもった有界領域とする.**

ソボレフ空間の拡張作用素を定義するために，まず $C^m(\Omega)$ の拡張作用素の構成をしておく.

定理 9.15 Ω を $\mathbf{R}^d$ の C^∞ 級境界をもつ有界領域とし，$\{\Omega_j, \psi_j\}_{j=0}^N$ を (9.12)–(9.15) を満たすものとする. $\widetilde{\Omega} = \bigcup_{j=0}^N \Omega_j$ とおき，$m = 0, 1, 2, \ldots$ とする. このとき，$C^m(\overline{\Omega})$ から $C_0^m(\widetilde{\Omega})$ への線形作用素 E_m で，$f \in C^m(\overline{\Omega})$ に対して，次を満たすようなものが存在する:

$$E_m f | \overline{\Omega} = f, \tag{9.18}$$

$$\|E_m f\|_{2,\ell} \leqq C_\ell \|f\|_{2,\ell,\Omega}$$
$$(\ell = 0, 1, \ldots, m;\ \text{ただし}\ C_\ell\ \text{は}\ f\ \text{に依存しない正定数}). \tag{9.19}$$

まず，定理の証明に必要な補助的な考察をしておく.

$$C_-^m(B_R^-) = \{f | B_R^- : f \in C_0^m(B_R)\}$$

とする.

補題 9.16 $C_-^m(B_R^-)$ から $C_0^m(B_R)$ への線形作用素 $\widetilde{E}_m$ で，次の (i), (ii) を満たすものが存在する: $f \in C_-^m(B_R^-)$ に対して

(i) $\widetilde{E}_m f(x) = f(x) \qquad (x \in B_R^-)$,

(ii) $\|\widetilde{E}_m f\|_{2,\ell} \leqq C_\ell \|f\|_{2,\ell,B_R^-}$

$(\ell = 0, 1 \ldots, m;$ ただし C_ℓ は f にはよらない正定数$)$.

証明 ある実数 $c_1, \ldots, c_{m+1}$ で

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-j)^k c_j = 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{9.20}$$

を満たすものが存在する (証明はあとで行う). $f \in C_-^m(B_R^-)$ に対して

$$\widetilde{E}_m f(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in B_R^-) \\ \sum_{j=1}^{m+1} c_j f(x_1, \ldots, x_{d-1}, -jx_d) & (x \in B_R,\ x_d > 0) \end{cases}$$

とおく. ただし $x \in \mathbf{R}^d$, $x_d < 0$, $x \notin B_R^-$ に対しては, 便宜上 $f(x) = 0$ と定めておく. このとき, $x \in B_R$, $x_d > 0$ に対して

$$\partial^\alpha \widetilde{E}_m f(x) = \sum_{j=1}^{m+1} (-j)^{\alpha_d} c_j \partial^\alpha f(x_1, \ldots, x_{d-1}, -jx_d) \qquad (|\alpha| \leqq m).$$

ゆえに $\lim_{x_d \searrow 0} \partial^\alpha \widetilde{E}_m f(x) = \partial^\alpha f(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0)$ である. したがって, $\widetilde{E}_m f \in C_0^m(B_R)$ となることを示すことができる. また,

$$\int_{B_R} |\partial^\alpha \widetilde{E}_m f(x)|^2 \, dx \leqq \left(1 + 2^m \sum_{j=1}^{m+1} j^{2\alpha_d - 1} |c_j|^2\right) \int_{B_R^-} |\partial^\alpha f(x)|^2 \, dx.$$

ゆえに (ii) が証明された.

(i) は定義から明らかである.

最後に (9.20) を証明しよう. これは

$$\begin{pmatrix} (-1)^0 & \ldots & (-m-1)^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^m & \ldots & (-m-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.21}$$

を解けばよいのであるが, この $(m+1, m+1)$ 行列がファンデルモンド行列の特別な場合であることを考慮すると, 容易にその行列式が 0 でないことがわかる. ゆえに (9.21) は解をもつ. □

定理 9.15 の証明 $\{\zeta_j\}_{j=1}^N$ を (9.16), (9.17) の関数とし,

$$E_m f = \zeta_0 f + \sum_{j=1}^N \widetilde{E}_m \left((\zeta_j f) \circ \psi_j^{-1} \Big|_{B_R^-} \right) \circ \psi_j$$

と定義する. ただし, ここで便宜上 $x \notin \Omega_j$ のときは

$$\widetilde{E}_m \left((\zeta_j f) \circ \psi_j^{-1} \Big|_{B_R^-} \right) \circ \psi_j(x) = 0$$

と定めておく. 補題 9.16 より $\widetilde{E}_m \left((\zeta_j f) \circ \psi_j^{-1} \Big|_{B_R^-} \right) \circ \psi_j \in C_0^m(\Omega_j)$ であり, $E_m f(x) =$

$f(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ が成り立っている.

補題 9.16 (ii) より，(9.19) は明らかである. □

$C^m(\Omega)$ に対して定義した拡張作用素 E_m を $W^m(\Omega)$ に拡張する.

定理 9.17 Ω, $\widetilde{\Omega}$ を定理 9.15 と同じものとする．このとき，$W^m(\Omega)$ から $W_0^m(\widetilde{\Omega})$ への線形作用素 E_m で，次の (i), (ii) を満たすものが存在する: $f \in W^m(\Omega)$ に対して，

(i) $E_m f|\Omega = f$,

(ii) $\|E_m f\|_{2,\ell} \leqq C_\ell \|f\|_{2,\ell,\Omega}$

$(\ell = 0, 1 \ldots, m$; ただし C_ℓ は f にはよらない正定数$)$.

証明 $f \in W^m(\Omega)$ とすると，ある $g \in W^m(\mathbf{R}^d)$ が存在し，$g|\Omega = f$ を満たす．定理 9.3 より，ある $g_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ が存在し，$\|g_j - g\|_{2,m} \to 0$ $(j \to \infty)$ となる．定理 9.15 より $E_m g_j \in C_0^m(\widetilde{\Omega}) \subset W_0^m(\widetilde{\Omega})$ であり，さらに

$$\|E_m g_j - E_m g_k\|_{2,m} \leqq C_m \|g_j - g_k\|_{2,m,\Omega} \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

$W_0^m(\widetilde{\Omega})$ の完備性より，ある $\widetilde{f} \in W_0^m(\widetilde{\Omega})$ が存在し $\|\widetilde{f} - E_m g_j\|_{2,m} \to 0$ $(j \to \infty)$ となる．じつはこの $\widetilde{f}$ は g, g_j のとり方に依存しないで決まる．なぜならば，$u \in W^m(\mathbf{R}^d)$, $u_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で，$u|\Omega = f$, $\|u - u_j\|_{2,m} \to 0$ $(j \to \infty)$ であるとすると，$u|\Omega = f = g|\Omega$ であるから，

$$\begin{aligned}\|E_m g_j - E_m u_j\|_{2,m} &\leqq C_m \|g_j - u_j\|_{2,m,\Omega} \\ &\leqq C_m(\|g_j - g\|_{2,m,\Omega} + \|u - u_j\|_{2,m,\Omega}) \\ &\leqq C_m(\|g_j - g\|_{2,m} + \|u - u_j\|_{2,m}) \to 0 \qquad (j \to \infty).\end{aligned}$$

ゆえに，$\|\widetilde{f} - E_m u_j\|_{2,m} \to 0$ $(j \to \infty)$ となる．そこで

$$E_m f = \widetilde{f}$$

と定義する．すると

$$E_m f|\Omega = \widetilde{f}|\Omega = \lim_{j \to \infty} E_m g_j|\Omega = g|\Omega = f.$$

さらに

$$\begin{aligned}\|E_m f\|_{2,m} = \lim_{j \to \infty} \|E_m g_j\|_{2,m} &\leqq C_m \lim_{j \to \infty} \|g_j\|_{2,m,\Omega} \\ &= C_m \|g\|_{2,m,\Omega} = C_m \|f\|_{W^m(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

この拡張作用素 E_m を使うと，$W_0^m(\widetilde{\Omega})$ で成り立つ多くの性質が $W^m(\Omega)$ でも成り立つことがわかる．以下にそのいくつかを示しておく.

定理 9.18　$(W^m(\Omega), \|\cdot\|_{W^m(\Omega)})$ は完備である．

証明　$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W^m(\Omega)$ が $\|f_j - f_k\|_{W^m(\Omega)} \to 0$ $(j,k \to \infty)$ を満たしているとする．定理 9.17 より $\|E_m f_j - E_m f_k\|_{2,m} \to 0$ $(j,k \to \infty)$ である．$W_0^m(\widetilde{\Omega})$ の完備性より，ある $\widetilde{h} \in W_0^m(\widetilde{\Omega})$ が存在し，$\|\widetilde{h} - E_m f_j\|_{2,m} \to 0$ $(j \to \infty)$ を満たす．$h = \widetilde{h}|\Omega$ とおくと，$W^m(\Omega)$ の定義から $h \in W^m(\Omega)$ であり，しかも

$$\|h - f_j\|_{W^m(\Omega)} = \|\widetilde{h} - E_m f_j\|_{2,m,\Omega} \leqq \|\widetilde{h} - E_m f_j\|_{2,m} \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

がわかる．□

レーリッヒの定理も $W^m(\Omega)$ に対して証明できる:

定理 9.19 (レーリッヒの定理)　$0 \leqq m < m'$ なる整数 m, m' を任意にとる．$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset W^{m'}(\Omega)$ が $\sup_j \|f_j\|_{W^{m'}(\Omega)} < \infty$ を満たすとき，$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{f_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ とある $f \in W^m(\Omega)$ が存在し，$\|f_{j'} - f\|_{W^m(\Omega)} \to 0$ $(j \to \infty)$ となる．

証明　定理 9.17 より $\sup_j \|E_{m'} f_j\|_{2,m'} < \infty$ がわかる．ゆえに定理 9.14 より，ある部分列 $\{E_{m'} f_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ とある $\widetilde{f} \in W_0^m(\widetilde{\Omega})$ が存在し，$\|E_{m'} f_{j'} - \widetilde{f}\|_{2,m} \to 0$ $(j' \to \infty)$．ここで $f = \widetilde{f}|\Omega$ とおくと，$\{f_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ と f が求めるものである．□

注意 (Ω 上のソボレフ空間の別の定義)　$W^m(\Omega)$ は次のように表すこともできる: $f \in L^2(\Omega)$ に対して，f が Ω 上で α $(\in \mathbf{Z}_+^d)$ 次の L^2 導関数をもつとは，ある $g \in L^2(\Omega)$ が存在し，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx \tag{9.22}$$

が成り立つことである．このとき，(9.22) を満たす $g \in L^2(\Omega)$ は一意的に決まる ((9.11) の前に行った議論参照)．そこで $D^\alpha f = g$ とおく．便宜的な記号として，

$$\widetilde{W}^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \begin{array}{l} \text{任意の } |\alpha| \leqq m \text{ に対して } \Omega \text{ 上で} \\ \alpha \text{ 階の } L^2 \text{ 導関数をもつ.} \end{array} \right\}$$

とおく．これに対して $\|\cdot\|_{2,m,\Omega}$ と同様のノルムが定義できる．明らかに $W^m(\Omega) \subset \widetilde{W}^m(\Omega)$ である．また，$\widetilde{W}^m(\Omega)$ に対しても拡張作用素が定義されることが知られている．ゆえに $W^m(\Omega) = \widetilde{W}^m(\Omega)$ が得られる．

なお，ソボレフ空間に関するより詳しいことは下記の文献を参照されたい:

R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

10章

線形作用素のスペクトル分解

10.1　微分作用素のスペクトル分解について

本章と次章では線形作用素のスペクトル分解について学ぶ.

まず，微分作用素のスペクトル分解について考える．もっとも簡単なものは $C^1(-\pi,\pi)$ 上の微分作用素

$$T = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

であろう．T を $C^1(-\pi,\pi)$ を定義域とするヒルベルト空間 $L^2(-\pi,\pi)$ 上の線形作用素とみなす．このとき，

$$T(e^{ikx}) = ke^{ikx}$$

であり，$e^{ikx} \in C^1(-\pi,\pi)$ である．つまり，$\left\{e^{ikx}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は T の固有ベクトルであり，k は T の固有値であることがわかる．さらに，フーリエ級数の話から，$\left\{e^{ikx}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は $L^2(-\pi,\pi)$ の正規直交基底である (内積は，6.2 節の例 1 で定めたものとする)．したがって，P_k を $L^2(-\pi,\pi)$ から e^{ikx} で生成される 1 次元部分空間 M_k への直交射影とすると，$u \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して，

$$\left\|u - \sum_{k=-n}^{n} P_k(u)\right\| = \left\|u - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}\right\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．すなわち，このことを形式的に書けば，

$$I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k$$

と表すことができる．また，

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kP_k$$

と書くことができる．これが T のスペクトル分解である.

次に，同じ作用素 T を，今度は定義を変更して $D(T) = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ とするヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ 上の線形作用素とみなすとどうなるだろうか．この場合でも

$$T(e^{ikx}) = ke^{ikx}$$

は成り立っているのであるが，ただ注意しなければならないことは，e^{ikx} は $L^2(\mathbf{R})$ の元にはなっていないことである．つまり，T は $L^2(\mathbf{R})$ 上の線形作用素と考えたときには，固有値をもたないことになる．しかしながら，T は解析学でもっとも基本的な微分作用素のひとつなので「固有値がない」と素知らぬ顔をしているわけにはいかない．この点を打開するため，次のようにして固有値の定義をもう少しゆるめ，それを固有値と同じように扱っていくことが考えられた．

定義 10.1 (固有値の定義の一般化) $(X, (\ ,\ ))$ をヒルベルト空間とし，T を X 上の線形作用素であるとする．$\lambda \in \mathbf{C}$ と次にあげる (i), (ii), (iii) を満たす可算無限個の元 $u_n \in D(T)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が存在するとき，$\{u_n\}_n$ を λ に関する T の**ワイル列**という：

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|T(u_n) - \lambda u_n\| = 0$,

(ii) $\displaystyle\sup_n \|u_n\| < \infty$,

(iii) $\{u_n\}$ のいかなる部分列も収束列ではない．

特に T が X 上の自己共役作用素であり，λ に関する T のワイル列が存在するような λ 全体のなす集合を T の**真性スペクトル**といい，λ は T の**真性スペクトルに属する**という．

この定義の意味であるが，(i) をみればわかるように，固有ベクトルが存在しなくても，固有ベクトルに近いベクトルの列が存在するならば，それも固有値のようなものとみなすということである．このように，固有値だけでなく，真性スペクトルの概念も導入しておくと，従来の意味の固有値をもたない作用素でも，真性スペクトルならばもつことがわかる．実際，微分作用素 $(1/i)(d/dx)$ も真性スペクトルはもつ．

定理 10.1 $T = i\dfrac{d}{dx}$ を $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ 上の微分作用素とし，$\widetilde{T}$ を超関数での意味の微分作用素

$$\widetilde{T}f = \frac{1}{i}\frac{df}{dx} \qquad (f \in W^1(\mathbf{R}))$$

とする (定理 9.9 の記号では $\widetilde{P}$). このとき, すべての $\lambda \in \mathbf{R}$ は $\widetilde{T}$ の真性スペクトルに属する.

証明 $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ で $\psi \neq 0$ なるものをとり, $\varepsilon_j \to 0$ $(j \to \infty)$ なる正数列 $\{\varepsilon_j\}$ と $|x_j| \to \infty$ $(j \to \infty)$ なる点列 $\{x_j\}_j \subset \mathbf{R}$ を

$$f_j(x) = \sqrt{\varepsilon_j}\psi\left(\varepsilon_j(x - x_j)\right) e^{i\lambda x}$$

が

$$\mathrm{supp}(f_j) \cap \mathrm{supp}(f_k) = \emptyset \qquad (j \neq k)$$

となるようにとる. このとき, $\|f_j\|_2 = \|\psi\|_2$ であり, したがって

$$\left\|f_j - f_k\right\|_2^2 = \left\|f_j\right\|_2^2 + \left\|f_k\right\|_2^2 = 2\left\|\psi\right\|_2^2 > 0$$

である. 計算すれば

$$\widetilde{T}(f_j)(x) - \lambda f_j(x) = \sqrt{\varepsilon_j}\varepsilon_j(D\psi)(\varepsilon_j(x - x_j))e^{i\lambda x}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{T}(f_j) - \lambda f_j\right\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_j^3 \left|(D\psi)(\varepsilon_j(x - x_j))\right|^2 dx \\ &= \varepsilon_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} |D\psi(x)|^2\, dx \to 0 \qquad (j \to \infty)\end{aligned}$$

となる. よって, f_j は λ のワイル列である. □

しかしながら, このように固有値を拡大解釈しても, それに関するスペクトル分解のようなものができなければ, あまり意味がない. これから述べていくことは, その真性スペクトルも含めたスペクトル分解である.

まず準備的な考察からはじめよう. 定理 10.1 でみたように, 真性スペクトルは離散的にではなく連続的にでてくることもあることに注意しておく. このような場合に問題になることは, そのスペクトル分解は, もしあったとしても, 行列のときのように

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m$$

と和の形で書けなくなるだろうということである. 真性スペクトルが連続的に現れる場合に予想できるスペクトル分解の形は, 和を積分に変えたものである. そこでまず, $d \times d$ のエルミート行列 A のスペクトル分解を積分で表すことを考えてみよう. 必要ならば, A の固有値のうち互いに異なるものをすべてとりだし, 番号を付け替えて,

$$-\infty < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m < \infty$$

としておく．また，P_i を $\mathbf{C}^d$ から λ_i に属する固有空間への直交射影とする (8.1 節の P_i と同じものである)．そして，$t \in (-\infty, \infty)$ に対して

$$E(t) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < \lambda_1) \\ P_1 & (\lambda_1 \leqq t < \lambda_2) \\ P_1 + P_2 & (\lambda_2 \leqq t < \lambda_3) \\ \quad \vdots & \\ P_1 + \cdots + P_m & (\lambda_m \leqq t < \infty) \end{cases}$$

とおく．すると $u, v \in \mathbf{C}^n$ に対して

$$(E(t)u, v) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < \lambda_1) \\ (P_1(u), v) & (\lambda_1 \leqq t < \lambda_2) \\ (P_1(u), v) + (P_2(u), v) & (\lambda_2 \leqq t < \lambda_3) \\ \quad \vdots & \\ (P_1(u), v) + \cdots + (P_m(u), v) & (\lambda_m \leqq t < \infty) \end{cases}$$

がわかる．ゆえに，スティルチェス積分 (後出の 10.3 節にスティルチェス積分の簡単な解説がある) を使えば，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t\, d(E(t)u, v) &= \lambda_1(P_1(u), v) + \cdots + \lambda_m(P_m(u), v) \\ &= (Au, v) \end{aligned}$$

となっている ((8.7) 参照)．このように，スペクトル分解を見かけ上，連続化して積分表示することができる．

次に，定理 10.1 で定めた $D(T) = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ なる微分作用素 T に対しても，$E(t)$ の選び方を工夫すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\, d(E(t)u, v) = (Tu, v)$$

とできることを示しておこう．$u \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して，フーリエ変換と微分の関係を使うと

$$T(u) = \frac{1}{i}\frac{du}{dx} = \mathcal{F}^{-1}\left[\xi \mathcal{F}[u]\right]$$

であるから，行列のときの $E(t)$ の定義を参考にして，

$$E(t)u = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{(-\infty, t]}\mathcal{F}[u]\right]$$

と定義してみる．ただし，ここで $\chi_{(-\infty,t]}$ は $(-\infty,t]$ の特性関数である．補題 3.22 より，$v \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して，

$$(T(u),v) = \frac{1}{2\pi}(\xi\mathcal{F}[u],\mathcal{F}[v]) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\mathcal{F}[u](\xi)\overline{\mathcal{F}[v](\xi)}\,d\xi$$

である．

$$\begin{aligned}(E(t)u,v) &= \frac{1}{2\pi}(\chi_{(-\infty,t]}\mathcal{F}[u],\mathcal{F}[v]) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} \mathcal{F}[u](\xi)\overline{\mathcal{F}[v](\xi)}\,d\xi\end{aligned}$$

であるから，

$$d(E(t)u,v) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[u](t)\overline{\mathcal{F}[v](t)}$$

となる．ゆえに，行列のスペクトル分解と類似の積分公式

$$(T(u),v) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d(E(t)u,v)$$

が得られる．

以下では，一般のヒルベルト空間 $(X,(\ ,\ ))$ 上の自己共役作用素 T に対しても，適当に作用素 $E(t)$ をとることにより，

$$(T(u),v) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d(E(t)u,v) = \int_{\sigma(T)} t\,d(E(t)u,v)$$

とできることを証明する．ただし，$\sigma(T)$ は T のスペクトル集合とよばれる集合で，T の多重度有限の固有値と真性スペクトルからなる (12 章参照).

10.2 スペクトル族とスペクトル族による積分

詳細な議論に入るまえに，これからの話がどのように進んでいくのかを述べておく．まず，スペクトル族とよばれる作用素の族 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ を定義する．これは，前節ででてきた作用素 $E(t)$ を抽象化したものである．次に，スペクトル族による積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE(t)$$

を定義し，これが自己共役作用素になっていることを示す．さらに，すべての

自己共役作用素 T に対して，あるスペクトル族 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ が存在し，

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE(t) \tag{10.1}$$

と書き表せることを証明する．そのあとで，じつは (10.1) の積分域が $\sigma(T)$ になっていることを示す．

はじめにスペクトル族の定義をする．$(X, (\ ,\ ))$ をヒルベルト空間とする．

定義 10.2 X の閉部分空間の族 $\{M(t) : t \in \mathbf{R}\}$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとする:

(i) $t < s$ ならば $M(t) \subset M(s)$,

(ii) $\displaystyle\bigcap_{t\in\mathbf{R}} M(t) = \{0\}$, $\quad \overline{\displaystyle\bigcup_{t\in\mathbf{R}} M(t)} = X$,

(iii) $M(t+0) = \displaystyle\bigcap_{t<s} M(s)$ とおくと $M(t+0) = M(t)$ $(t \in \mathbf{R})$.

このとき，X から $M(t)$ への直交射影を $E(t)$ とおき，$\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ を**スペクトル族**あるいは**単位の分解**という．

▶ **例 1** $X = \mathbf{C}^d$ とし，A を $d \times d$ のエルミート行列とする．$\lambda_1 < \cdots < \lambda_m$ を A の互いに異なる固有値，M_j を λ_j に関する固有空間とし，

$$M(t) = \begin{cases} \{0\} & (-\infty < t < \lambda_1) \\ M_1 & (\lambda_1 \leqq t < \lambda_2) \\ M_1 \oplus M_2 & (\lambda_2 \leqq t < \lambda_3) \\ \quad\vdots & \\ M_1 \oplus \cdots \oplus M_m & (\lambda_m \leqq t < \infty) \end{cases}$$

とおく．このとき，$M(t)$ は定義 10.2 の条件を満たし，$\mathbf{C}^d$ から $M(t)$ への直交射影 $E(t)$ は，10.1 節で定義した $E(t)$ と同じものになる． □

▶ **例 2** $X = L^2(\mathbf{R})$ とし，また，

$$M(t) = \{u \in X : \mathrm{supp}\,(\mathcal{F}[u]) \subset (-\infty, t]\} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

とする．このとき，$M(t)$ は定義 10.2 の条件を満たす．$E(t)$ を X から $M(t)$ への直交射影とすると，$u \in X$ は

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{(-\infty,t]}\mathcal{F}[u]\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{(t,\infty]}\mathcal{F}[u]\right] \quad (=: u_1 + u_2)$$

と分解できるが,

$$(u_1, u_2) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{(-\infty,t]}\mathcal{F}[u]\right],\ \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{(t,\infty]}\mathcal{F}[u]\right]\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}(\chi_{(-\infty,t]}\mathcal{F}[u],\ \chi_{(t,\infty]}\mathcal{F}[u]) = 0$$

であるから, $E(t)u = u_1 = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{(-\infty,t]}\mathcal{F}[u]\right]$ となり, 10.1 節の $E(t)$ と一致することがわかる. □

▶ **例 3** $X = L^2(\mathbf{R})$ とし, $\{V\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を多重解像度解析とする. $j \in \mathbf{Z}, j \leqq t < j+1$ に対して $M(t) = V_j$ と定義し, $E(t)$ を $L^2(\mathbf{R})$ から $M(t)$ への直交射影とする. 明らかに $M(t)$ は定義 10.2 の条件を満たし, $\{E(t)\}$ はスペクトル族になる. □

スペクトル族による積分を定義するため, スペクトル族のもついくつかの基本的な性質をあげておこう.

命題 10.2 (1) $E(t)E(s) = E(s)E(t) = E(\min\{s,t\})$ $(s, t \in \mathbf{R})$

(2) 任意の $u \in X$ に対して,

$$\lim_{t\to-\infty} \|E(t)u\| = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \|E(t)u - u\| = 0.$$

(3) 任意の $u \in X$ と任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\lim_{\varepsilon>0,\,\varepsilon\to 0} \|E(t+\varepsilon)u - E(t)u\| = 0.$$

証明 (1) $s < t$ の場合を示す. $M(s) \subset M(t)$ であるから, 任意の $u \in X$ に対して $E(t)E(s)u = E(s)u$ である. また, $M(t) = (M(t) \ominus M(s)) \oplus M(s)$ と直交分解すると, $X = M(t)^{\perp} \oplus (M(t) \ominus M(s)) \oplus M(s)$ である. したがって,

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \qquad (u_1 \in M(t)^{\perp},\ u_2 \in M(t) \ominus M(s),\ u_3 \in M(s))$$

と分解できる. したがって, 定義より次を得る:

$$E(s)E(t)u = E(s)(u_2 + u_3) = u_3. = E(s)u.$$

(2) $s < t$ のとき,

$$\|E(s)u\| = \|E(s)E(t)u\| \leqq \|E(t)u\|$$

であるから, $\{\|E(t)u\|\}$ は t に関する単調増加な数列になっているので, $\lim_{t\to-\infty} \|E(t)u\|$ が存在する. ところで $s < t$ のときは

$$(E(t)u, E(s)u) = (E(t)u, E(s)E(s)u) = (E(s)E(t)u, E(s)u)$$

$$= (E(s)u, E(s)u) = \|E(s)u\|^2$$

であるから，

$$\begin{aligned}\|E(t)u - E(s)u\|^2 &= \|E(t)u\|^2 + \|E(s)u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(E(t)u, E(s)u)\\ &= \|E(t)u\|^2 - \|E(s)u\|^2 \to 0 \qquad (s < t \to -\infty)\end{aligned}$$

である．したがって，X の完備性より，ある $v \in X$ が存在し，$\|v - E(t)u\| \to 0$ $(t \to -\infty)$ である．ところが，

$$v = \lim_{t\to-\infty} E(t)u \in \bigcap_{t\in\mathbf{R}} M(t) = \{0\}$$

となっている．

また，任意に $u \in X$ をとる．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $v_\varepsilon \in \bigcup_{t\in\mathbf{R}} M(t)$ で，$\|u - v_\varepsilon\| < \varepsilon/2$ となるものが存在する．$v_\varepsilon \in M(t)$ なるすべての t に対して $E(t)v_\varepsilon = v_\varepsilon$ であるから，

$$\|E(t)u - v_\varepsilon\| = \|E(t)(u - v_\varepsilon)\| \leqq \|u - v_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．したがって，

$$\|E(t)u - u\| \leqq \|u - v_\varepsilon\| + \|v_\varepsilon - E(t)u\| < \varepsilon$$

であり，$\lim_{t\to+\infty} \|E(t)u - u\| = 0$ を得る．

(3) (2) の前半の証明と同様にする: $\{\|E(t+\varepsilon)u\|\}_\varepsilon$ は ε に関する単調増加列であることに注意しておく．あとは (2) と同様にして

$$v_t = \lim_{\varepsilon>0,\,\varepsilon\to0} E(t+\varepsilon)u \in M(t+0) = M(t)$$

となる v_t の存在が証明できる．ゆえに，

$$v_t = E(t)(v_t) = \lim_{\varepsilon\to0} E(t)(E(t+\varepsilon)u) = E(t)u. \qquad \square$$

左半開区間 $I = (s, t]$ に対して，

$$E(I) = E(t) - E(s) \tag{10.2}$$

とおく．このとき次が成り立つ．

命題 10.3 左半開区間 $I = (s, t]$ に対して，$M(I) = M(t) \cap M(s)^\perp$ とおく．このとき，$E(I)$ は X から $M(I)$ への直交射影である．

証明 $X = M(s) \oplus (M(t) \ominus M(s)) \oplus M(t)^\perp$ であるから，$u \in X$ は

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \in M(s) \oplus (M(t) \ominus M(s)) \oplus M(t)^\perp$$

と分解できる．定義より $E(t)u = u_1 + u_2$ であり，$E(s)u = u_1$ である．したがって，$E(I)u = u_2$ である．すなわち，$E(I)$ は X から $M(t) \ominus M(s)$ への直交射影である．ここで，$M(t) \ominus M(s)$ は定義から $M(s)$ に直交する $M(t)$ の元からなる集合である．ゆえに $M(t) \ominus M(s) = M(I)$ となる．□

命題 10.4　I を左半開区間とする．このとき，次の (1)–(3) が成り立つ:

(1) $E(I)E(I) = E(I), \quad E(I)^* = E(I)$.

(2) $(E(I)u, u) = \|E(I)u\|^2$.

(3) I_1, I_2 を左半開区間とする．もし，$I_1 \cap I_2 = \emptyset$ であるならば

$$E(I_1)E(I_2) = E(I_2)E(I_1) = 0.$$

証明　(1)　$I = (s, t]$ とする．このとき，定理 6.10 より

$$E(I)^* = E(t)^* - E(s)^* = E(t) - E(s) = E(I)$$

である．また，

$$\begin{aligned} E(I)E(I) &= (E(t) - E(s))(E(t) - E(s)) \\ &= E(t)E(t) + E(s)E(s) - E(s)E(t) - E(t)E(s) \end{aligned}$$

である．ここで，

$$E(t)E(t) = E(t), \qquad E(s)E(s) = E(s), \qquad E(s)E(t) = E(t)E(s) = E(s)$$

であるから，(1) を得る．

(2)　(1) より，

$$(E(I)u, u) = (E(I)E(I)u, u) = (E(I)u, E(I)u) = \|E(I)u\|^2.$$

(3) $I_1 = (s_1, t_1]$, $I_2 = (s_2, t_2]$ で $t_1 \leqq s_2$ であるとする．このとき，

$$E(I_1)E(I_2) = (E(t_1) - E(s_1))(E(t_2) - E(s_2)) = 0$$

が容易に証明できる．

同様にして，$E(I_2)E(I_1) = 0$ も示すことができる．□

命題 10.2 により，$u \in X$ に対して $E(t)u$ の右側極限が

$$\lim_{\varepsilon > 0,\, \varepsilon \to 0} E(t + \varepsilon)u = E(t)u$$

となることがわかっているが，左側極限はどうなるのであろうか．じつは，左側極限は存在はするのだが，一般に $E(t)u$ に一致するかどうかはわからない．ここでは左側極限の存在を証明しておこう．

命題 10.5 任意の $u \in X$ に対して $\lim_{\varepsilon>0,\,\varepsilon\to 0} E(t-\varepsilon)u$ が存在する (この極限を $E(t-0)u$ で表す).

証明 $s < s'$ のとき，命題 10.2 の証明より

$$(E(s)u,u) = (E(s)E(s)u,u) = (E(s)u,E(s)u)$$
$$= \|E(s)u\|^2 \leqq \|E(s')u\|^2 = (E(s')u,u)$$

であるから，$\lim_{\varepsilon>0,\,\varepsilon\to 0}(E(t-\varepsilon)u,u)$ が存在する．したがって，$s < s' < t$, $s \to t$ のとき，

$$\|(E(s')-E(s))u\|^2 = |((E(s')-E(s))u,u)|$$
$$= |(E(s')u,u)-(E(s)u,u)| \to 0$$

となる．X の完備性から $E(t-0)u = \lim_{\varepsilon>0,\,\varepsilon\to 0} E(t-\varepsilon)u$ の存在がわかる． □

なお，本書をとおして $M(\lambda-0) = R(E(\lambda-0))$ と表す．

次の命題は，あとで定義するスペクトル族に関する積分の存在を保障するために使われる．

命題 10.6 $I_1,\dots,I_n$ を互いに交わることのない左半開区間であるとすると

$$\sum_{j=1}^{n} |(E(I_j)u,v)| \leqq \|u\|\,\|v\|$$

が成り立つ．

証明 命題 10.4 (2) とシュヴァルツの不等式より次のことがわかる:

$$\sum_{j=1}^{n} |(E(I_j)u,v)| = \sum_{j=1}^{n} |((E(I_j)u,E(I_j)v)|$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{n} \|E(I_j)u\|\,\|E(I_j)v\|$$
$$\leqq \left(\sum_{j=1}^{n} \|E(I_j)u\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} \|E(I_j)v\|^2\right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (E(I_j)u,u)\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} (E(I_j)v,v)\right)^{1/2}.$$

ここで，$\sum_j E(I_j)$ は $M(I_1)\oplus\cdots\oplus M(I_n)$ への直交射影であるから，

$$\left|\left(\sum_j E(I_j)x,x\right)\right| = \left\|\sum_j E(I_j)x\right\|^2 \leqq \|x\|^2$$

となる．よって，求める不等式が得られた． □

準備が整ったので，スペクトル族による積分を定義しよう．

$-\infty < a < b < \infty$ とする．$u \in X$ と $\varphi \in C([a,b])$ に対して，積分

$$\int_a^b \varphi(t)\,dE(t)u \tag{10.3}$$

を次のように定義する: $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ を任意にとり，さらに $t_j \leqq t'_j \leqq t_{j+1}$ となる t'_j を任意に選んでおく．そして，積分 (10.3) を定義する近似和を

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi(t'_j)E((t_j, t_{j+1}])u$$

によってつくる．もし，この近似和が $\max_j |t_{j+1} - t_j| \to 0$ となるように分割 Δ を細かくしていったとき，$[a,b]$ の分割方法と t'_j のとり方に無関係に X のある元に収束したとする．このとき，その元を積分

$$\int_a^b \varphi(t)\,dE(t)u$$

と表すことにする．

次の定理は，この積分の存在を保障するものである．

定理 10.7 $-\infty < a < b < \infty$ とする．任意の $u \in X$ と任意の $\varphi \in C([a,b])$ に対して，

$$\int_a^b \varphi(t)\,dE(t)u$$

がつねに存在する．

証明 証明方法は，連続関数に対する通常のリーマン積分

$$\int_b^a \varphi(t)\,dt$$

の存在を示すときと同様である: φ は $[a,b]$ 上で一様連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当に $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ を定めて

$$t', t'' \in [a,b], \quad |t' - t''| < \delta \Longrightarrow |\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon \tag{10.4}$$

となるようにできる．いま，任意に $[a,b]$ の二つの分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \quad \max_j |t_j - t_{j+1}| < \frac{\delta}{2},$$

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b, \quad \max_j |s_j - s_{j+1}| < \frac{\delta}{2}$$

を考える．このとき，二つの分割を合わせた細分を

$$a = r_0 < r_1 < \cdots < r_l = b \qquad (l \leqq m + n - 1)$$

とし，$t_j \leqq t'_j \leqq t_{j+1}$, $s_k \leqq s'_k \leqq s_{k+1}$ を満たす t'_j, s'_k を任意に選んで固定しておく．さらに

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(t'_j) E((t_j, t_{j+1}]) u - \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(s'_k) E((s_k, s_{k+1}]) u = \sum_{\alpha=0}^{l-1} \Phi_\alpha E((r_\alpha, r_{\alpha+1}]) u$$

となるように Φ_α をとると，(10.4) より $|\Phi_\alpha| < \varepsilon$ である．したがって，命題 10.6 を使って次のことがわかる:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(t'_j) E((t_j, t_{j+1}]) u - \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(s'_k) E((s_k, s_{k+1}]) u \right\|^2 \\
&\quad = \left\| \sum_{\alpha=0}^{l-1} \Phi_\alpha E((r_\alpha, r_{\alpha+1}]) u \right\|^2 \\
&\quad = \sum_{\alpha=0}^{l-1} |\Phi_\alpha|^2 \| E((r_\alpha, r_{\alpha+1}]) u \|^2 \\
&\quad < \varepsilon^2 \sum_{\alpha=0}^{l-1} |(E((r_\alpha, r_{\alpha+1}]) u, u)| \leqq \varepsilon^2 \|u\|^2.
\end{aligned}$$

ここで，特に $\{s_j\}$ として $\{t_j\}$ の細分を考え，$\max_j |t_j - t_{j+1}| \to 0$ とすると，X の完備性より，$\sum_j \varphi(t'_j) E((t_j, t_{j+1}]) u$ は X のある元 x に収束することがわかる．また，一般には，$\max_k |s_k - s_{k+1}| \to 0$ とすると，$\sum_k \varphi(s'_k) E((s_k, s_{k+1}]) u$ は $y \in X$ に収束する．ところが，すでに証明したように $\|x - y\|^2 \leqq \varepsilon^2 \|u\|^2$ である．ε は任意の正数であるから $x = y$ でなければならない．　□

スペクトル族に関する広義積分も定義しておく．以下，$C(\mathbf{R})$ により $\mathbf{R}$ 上の複素数値連続関数全体のなす集合を表す．$u \in X, \varphi \in C(\mathbf{R})$ に対して

$$\left\| \int_{-N'}^{N} \varphi(t)\, dE(t) u - x \right\| \to 0 \qquad (N, N' \to \infty)$$

なる $x \in X$ が存在するとき，x を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t) u \tag{10.5}$$

と書く．どのような $u \in X$ と $\varphi \in C(\mathbf{R})$ に対して広義積分 (10.5) が存在するするのか，その条件については節を改めて述べる．

10.3 スペクトル族の積分とスティルチェス積分

前節の広義積分 (10.5) が存在するための条件を，スティルチェス積分を使って述べる．スティルチェス積分とはリーマン積分を一般化したもので，実解析学などでよく使われる．スティルチェス積分をまだ学んだことのない読者のために，以下にその概要を述べておく．すでに知っている読者は，次項はとばしてもよい．

10.3.1 スティルチェス積分 | | Quick Review | |

まず，有界変動関数を定義しておく．区間 $I=[a,b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$ 上で定義された複素数値関数 g を考える．区間 I の任意の分割を

$$\Delta\ :\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

とし，

$$V_\Delta^I[g]=\sum_{j=1}^n|g(t_j)-g(t_{j-1})|$$

とおく．さらに，I のすべての分割 Δ に関する $V_\Delta^I[g]$ の上限を $V^I[g]$ とおく．

定義 10.3 (1) g が I 上の**有界変動関数**であるとは，$V^I[g]<\infty$ が成り立つことである．この $V^I[g]$ を g の**全変動**という．

(2) g を $\mathbf{R}$ 上の複素数値関数とする．g が $\mathbf{R}$ 上の**局所有界変動関数**とは，任意の有界閉区間 I に対して $V^I[g]<\infty$ となることである．

▶ **例 4** g を $\mathbf{R}$ 上の単調増加関数とする．このとき，g は $\mathbf{R}$ 上の局所有界変動関数である．実際，$[a,b]$ の分割 Δ に対して

$$V_\Delta^I[g]=\sum_{j=1}^n(g(t_j)-g(t_{j-1}))=g(b)-g(a)$$

であるから，$V^I[g]=g(b)-g(a)<\infty$ となっている．特に，$g(t)=t$ は $\mathbf{R}$ 上の局所有界変動関数である． □

スティルチェス積分は，次のように定義される．g を $[a,b]$ 上の有界変動関数とし，$f\in C([a,b])$ とする．$[a,b]$ の分割 Δ: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ を任意にとり，さらに $t_j\leqq t'_j\leqq t_{j+1}$ となる t'_j を任意に選んでおく．ここで，和

$$\sum_{j=1}^{n-1}f(t'_j)\{g(t_j)-g(t_{j-1})\} \tag{10.6}$$

を考える．もし，分割 Δ を $\max_j |t_{j+1} - t_j| \to 0$ となるように細かくしていったとき，$[a,b]$ の分割の仕方と t'_j のとり方に無関係に和 (10.6) が複素数 J に収束したとする．このとき，f は g に関して**スティルチェス積分可能**であるといい，

$$J = \int_a^b f(t)\,dg(t)$$

と表す．

次の定理が知られているが，証明は定理 10.7 とほとんど同じである．詳しくは [杉浦, p.356] を参照されたい．

定理 10.8 g を有界閉区間 I 上の有界変動関数とし，$f \in C(I)$ とする．このとき，次の f の g に関するスティルチェス積分が存在する:

$$\int_a^b f(t)\,dg(t).$$

広義スティルチェス積分も定義しておこう．

定義 10.4 g を $\mathbf{R}$ 上の局所有界変動関数とし，$f \in C(\mathbf{R})$ とする．もし，

$$\lim_{N,N' \to \infty} \int_{-N'}^{N} f(t)\,dg(t)$$

が存在するとき，f は g に関して**広義スティルチェス積分可能**といい，その値を

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dg(t)$$

と表す．

10.3.2 スティルチェス積分とスペクトル族による積分

命題 10.6 より，$u, v \in X$ に対して，関数

$$t \mapsto (E(t)u, v)$$

は $\mathbf{R}$ 上の局所有界変動関数になっている．実際，任意の有界区間 I に対してそこでの全変動を V^I とすると，命題 10.6 より $V^I \leqq \|u\|\,\|v\|$ である．したがって，次のようなスティルチェス積分

$$\int_a^b \varphi(t)\,d(E(t)u, v), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,d(E(t)u, v)$$

を形式的に考えることができる．このスティルチェス積分と前節で定義したスペクトル族による積分との関係を調べておこう．

命題 10.9 $I = [a,b]$ を有界閉区間とし，$\varphi \in C(I)$ とする．このとき，$u, v \in X$ に対して，

$$\left(\int_a^b \varphi(t)\, dE(t)u, v \right) = \int_a^b \varphi(t)\, d(E(t)u, v) \tag{10.7}$$

である．さらに，任意の $u, v \in X$ に対して次が成り立つ:

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\, d(E(t)u, v) \right| \leqq \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u) \right)^{1/2} \|v\|, \tag{10.8}$$

$$\left\| \int_a^b \varphi(t)\, dE(t)u \right\| = \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u) \right)^{1/2}. \tag{10.9}$$

証明 $g(t) = (E(t)u, v)$ とおく．$[a,b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ に対して $I_j = (t_{j-1}, t_j]$ とおき，$t'_j \in I_j$ を任意にとる．すると，

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \varphi(t'_j) E(I_j)u, v \right) &= \sum_{j=1}^n \varphi(t'_j)(E(I_j)u, v) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi(t'_j)(g(t_j) - g(t_{j-1})) \end{aligned}$$

であるから，ここで $\max_j |t_j - t_{j-1}| \to 0$ なる細分化をすると両辺ともに収束し，命題の前半の証明が終わる．また，シュヴァルツの不等式より，

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \varphi(t'_j)(E(I_j)u, v) \right| &\leqq \sum_j |\varphi(t'_j)|\; |(E(I_j)u, E(I_j)v)| \\ &= \sum_j |\varphi(t'_j)|\; \|E(I_j)u\|\; \|E(I_j)v\| \\ &= \sum_j |\varphi(t'_j)| (E(I_j)u, u)^{1/2} (E(I_j)v, v)^{1/2} \\ &\leqq \left\{ \sum_j |\varphi(t'_j)|^2 (E(I_j)u, u) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_j (E(I_j)v, v) \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \sum_j |\varphi(t'_j)|^2 (E(I_j)u, u) \right\}^{1/2} (E(I)v, v)^{1/2} \\ &\leqq \left\{ \sum_j |\varphi(t'_j)|^2 (E(I_j)u, u) \right\}^{1/2} \|v\|. \end{aligned}$$

ここで，分割を $\max_j |t_j - t_{j-1}| \to 0$ となるように細分化していけば，(10.8) が得られる．

次に，スペクトル族に関する積分

$$\int_a^b \varphi(t)\, dE(t)u$$

の近似和として $\sum_j \varphi(t'_j)E((t_j, t_{j+1}])u$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned}\left\|\sum_j \varphi(t'_j)E((t_j, t_{j+1}])u\right\|^2 &= \sum_{j,k} \varphi(t'_j)\overline{\varphi(t'_k)}\,(E((t_j, t_{j+1}])u, E((t_k, t_{k+1}])u) \\ &= \sum_j |\varphi(t'_j)|^2\,(E((t_j, t_{j+1}])u, E((t_j, t_{j+1}])u) \\ &= \sum_j |\varphi(t'_j)|^2\,(E((t_j, t_{j+1}])u, u)\,.\end{aligned}$$

ここで，近似和に現れる $[a, b]$ の分割を細かくしていくと

$$\left\|\int_a^b \varphi(t)\, dE(t)\right\|^2 = \int_a^b |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u)$$

が得られる． □

広義積分については次のことがいえる．

定理 10.10 $\varphi \in C(\mathbf{R})$ とし，

$$D_\varphi = \left\{u \in X \ :\ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u) < \infty\right\}$$

とおく．$u \in D_\varphi$ のとき，任意の $v \in X$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)$$

がともに存在し，

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u, v\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)$$

が成り立つ．さらに，

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)\right| \leqq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u)\right)^{1/2} \|v\|,$$

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u\right\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u)\right)^{1/2}$$

が成り立つ.

証明 $-\infty < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < \infty$ とする. このとき,

$$\left|\int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(t)\, d(E(t)u, v) - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)\right|$$
$$\leqq \left|\int_{\alpha'}^{\alpha} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)\right| + \left|\int_{\beta}^{\beta'} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)\right|$$
$$\leqq \left(\int_{\alpha'}^{\alpha} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u)\right)^{1/2} \|v\| + \left(\int_{\beta}^{\beta'} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u)\right)^{1/2} \|v\|$$
$$\to 0 \qquad (\alpha, \alpha' \to -\infty;\ \beta, \beta' \to \infty).$$

ゆえに,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)$$

が存在する. また,

$$\left\|\int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi(t)\, dE(t)u - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, dE(t)u\right\|$$
$$\leqq \left\|\int_{\alpha'}^{\alpha} \varphi(t)\, dE(t)u\right\| + \left\|\int_{\beta}^{\beta'} \varphi(t)\, dE(t)u\right\|$$
$$\leqq \left(\int_{\alpha'}^{\alpha} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u)\right)^{1/2} + \left(\int_{\beta}^{\beta'} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u)\right)^{1/2}$$
$$\to 0 \qquad (\alpha, \alpha' \to -\infty;\ \beta, \beta' \to \infty).$$

したがって,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u \quad (\in X)$$

が存在し,

$$\left\|\int_{-N}^{N} \varphi(t)\, dE(t)u - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u\right\| \to 0 \qquad (N, N' \to \infty)$$

となっている. ゆえに,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u, v\right) = \lim_{N,N'\to\infty} \left(\int_{-N'}^{N} \varphi(t)\, dE(t)u, v\right)$$
$$= \lim_{N,N'\to\infty} \int_{-N'}^{N} \varphi(t)\, d(E(t)u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)$$

が成り立つ. 定理の残りの主張は, 命題 10.9 の不等式, あるいは等式を $a \to -\infty$, $b \to \infty$ とすれば得られる. □

ある意味でこの定理の逆のようなものも成り立つ.

定理 10.11 $\varphi \in C(\mathbf{R})$ とし，$u \in X$ とする．もし，任意の $v \in X$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)$$

が存在し，しかも

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v)\right| \leqq C\|v\| \tag{10.10}$$

となる v に無関係な正定数 C が存在したとする．このとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u) \leqq C^2 < \infty$$

である.

証明 $-\infty < a < b < \infty$ に対して,

$$u' = \int_a^b \varphi(t)\, dE(t)u$$

とおくと，$E((a,b])u' = u'$ である．なぜならば，u' の任意の近似和

$$u'' = \sum_j \varphi(t_j')E((t_j, t_{j+1}])u$$

に対しては $E((a,b])u'' = u''$ となっているからである．このことより，$-N < a < b < N$ なる N に対して

$$\begin{aligned}\int_{-N}^{N} \varphi(t)\, d(E(t)u, u') &= \int_{-N}^{N} \varphi(t)\, d(E(t)u, E((a,b])u') \\ &= \int_{-N}^{N} \varphi(t)\, d(E((a,b])E(t)u, u') \\ &= \int_a^b \varphi(t)\, d(E(t)u, u') \qquad \text{(下記の (10.11) 参照)}\end{aligned}$$

である．ここで最後の等式は

$$E(t)E((a,b]) = E((a,b])E(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqq a) \\ E(t) - E(a) & (a < t < b) \\ E((a,b]) & (b \leqq t) \end{cases} \tag{10.11}$$

となっていることによる.

さらに，u' の定義と (10.7) より

$$\int_a^b \varphi(t)\, d(E(t)u, u') = (u'u') = \|u'\|^2$$

である．ゆえに $N \to \infty$ とすると，仮定 (10.10) より，

$$\|u'\|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, u') \right| \leqq C\|u'\|$$

となることがわかる．この両辺を $\|u'\|$ で割ると，$\|u'\| \leqq C$ を得る．ゆえに，u' の定義と命題 10.9 の (10.9) により

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u) = \|u'\|^2 \leqq C^2$$

である．ここで，$a \to -\infty, b \to \infty$ とすれば求める結果が得られる．　□

注意　本書では，連続関数 φ に対してスペクトル積分を定義したが，ボレル可測関数に対するスペクトル積分を定義することもできる．ただしその場合，ルベーグ・スティルチェス積分が用いられる ([藤田・黒田・伊藤, 11 章] 参照).

10.4　スペクトル作用素

スペクトル族 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ からスペクトル作用素とよばれる線形作用素を定義し，その基本的な性質を学ぶ．

定義 10.5　$\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ をスペクトル族とし，φ を $\mathbf{R}$ 上の複素数値連続関数とする．

$$D(T) = \left\{ u \in X \ : \ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)u, u) < \infty \right\}$$

を定義域とする作用素 T を

$$T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u \qquad (u \in D(T))$$

により定義する．この T を $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ と φ **に関するスペクトル作用素**という．特に，$\varphi(t) = t$ であるとき，T を $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ の**スペクトル作用素**という．

次の定理は，スペクトル作用素のもっとも基本的な性質を述べたものである．

定理 10.12　T をスペクトル族 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ と $\varphi \in C(\mathbf{R})$ に関するスペクトル作用素とする．このとき，次の (1)–(4) が成り立つ:

(1)　$\overline{D(T)} = X$.

(2) $u \in D(T), v \in X$ に対して

$$(T(u), v) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v).$$

(3) T は閉作用素である.

(4) $D(T^*) = D(T)$ であり,

$$T^*(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dE(t)u \qquad (u \in D(T^*)).$$

(すなわち, T^* は $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ と $\overline{\varphi}$ に関するスペクトル作用素である.)

証明 定理 10.10, および

$$E(t)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 E(t)u_1 + \alpha_2 E(t)u_2 \quad (u_j \in X,\ \alpha_j \in \mathbf{C}\ (j = 1, 2))$$

より, T が $D(T)$ を定義域とする X 上の線形作用素であることがわかる. また, 定理 10.10 より, (2) も得られる.

(1) を証明する. 任意に $w \in X$ をとる. このとき, 命題 10.2 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|w - E((a, b])w\| < \varepsilon$ となる $-\infty < a < b < \infty$ が存在する. (10.11) より,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d\,(E(t)E((a, b])w, E((a, b])w) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d\,(E((a, b])E(t)w, E((a, b])w) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d(E((a, b])E(t)w, w) \\
&= \int_{a}^{b} |\varphi(t)|^2\, d\,(E(t)w, w) < \infty
\end{aligned}$$

であるから, $E((a, b])w \in D(T)$ である. これより $\overline{D(T)} = X$ がわかる.

(4) を証明する. 線形作用素 S を $D(S) = D(T)$ とし,

$$S(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dE(t)u \qquad (u \in D(S))$$

と定義する. $T^* = S$ を示す. まず, $S \subset T^*$ の証明からはじめよう. $u, v \in D(S)$ に対して

$$\begin{aligned}
(T(u), v) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(u, E(t)v) \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, d(E(t)v, u)} \\
&= \overline{(S(v), u)} = (u, S(v)).
\end{aligned}$$

これより, $v \in D(T^*)$ であり, $S(v) = T^*(v)$ であるから, $S \subset T^*$ である.

次に $T^* \subset S$ を示すが，そのためには命題 8.20 より，$D(T^*) \subset D(S)$ を証明すればよい．$v \in D(T^*)$ とし，$v' = T^*(v)$ とおく．任意の $z \in X$ に対して，(1) の証明より，$-\infty < a < b < \infty$ のとき $E((a,b])z \in D(T) = D(S)$ であるから，

$$\begin{aligned}(z, E((a,b])v') = (E((a,b])z, v') &= (E((a,b])z, T^*(v)) \\ &= (TE((a,b])z, v) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d(E(t)E((a,b])z, v) \\ &= \int_a^b \varphi(t)\, d(E(t)z, v).\end{aligned}$$

ゆえに，

$$(E((a,b])v', z) = \int_a^b \overline{\varphi(t)}\, d\overline{(E(t)z, v)} = \int_a^b \overline{\varphi(t)}\, d(E(t)v, z).$$

ここで，$a \to -\infty, b \to \infty$ とすると

$$(v', z) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, d(E(t)v, z)$$

が存在し，しかも

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, d(E(t)v, z) \right| \leqq \|v'\|\,\|z\|$$

である．したがって，定理 10.11 より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\, d(E(t)v, v) \leqq \|v'\|^2 < \infty$$

である．よって $v \in D(S)$ となる．

最後に (3) を証明する．(4) の証明で定めた S に (4) を適用すると，$D(S^*) = D(S) = D(T)$ であり，

$$S^*(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE(t)u = T(u)$$

である．ゆえに，$T = S^*$ がわかるが，一般に共役作用素は閉作用素であったから，T も閉作用素である． □

この定理の系として，次が得られる．

系 10.13 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ をスペクトル族とし，φ を $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数とする．このとき，$\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ と φ に関するスペクトル作用素は自己共役作用素である．

証明 f が実数値であるから，$\overline{f} = f$ である．したがって，前定理 $T = T^*$ となることがわかる． □

系 10.13 の逆が成り立つ．それが，スペクトル分解定理である．スペクトル分解定理は，関数解析学にそびえ立つ金字塔の一つであり，その証明も少し大がかりになるので，次章で述べることにしたい．

ところで，系 10.13 自身も興味深い．たとえばこの系を 10.2 節の例 1 に適用すれば行列 A が得られ，例 2 に適用すれば微分作用素 $-id/dx$ が求めるスペクトル写像になっている．また，例 3 の多重解像度解析に適用することもできる．この他にも，多変数の帯域制限関数からなる空間に関するスペクトル写像などが自然に考えられる．これらについては次節で詳しく述べる．

最後に，再び一般のヒルベルト空間 X 上の一般のスペクトル族 $\{E(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ に話をもどし，スペクトル作用素の合成作用素について述べる．

定理 10.14 $\{E(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ をスペクトル族とし，$f, g \in C(\mathbf{R})$ とする．

$$T_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda), \qquad T_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, dE(\lambda),$$

$$T_{fg} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(\lambda)\, dE(\lambda)$$

とおく．$u \in D(T_{fg}) \cap D(T_g)$ ならば $u \in D(T_f \circ T_g)$ であり，次が成り立つ:

$$T_f \circ T_g(u) = T_{fg}(u).$$

まず，スティルチェス積分に関する補題から証明する．

補題 10.15 (1) F を $[a, b]$ 上の有界変動関数とする．$f, g \in C([a, b])$ とし，

$$G(\lambda) = \int_a^{\lambda} g(t)\, dF(t) \qquad (\lambda \in [a, b])$$

とする．このとき，次が成り立つ:

$$\int_a^b f(\lambda)\, dG(\lambda) = \int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\, dF(\lambda).$$

(2) F を $\mathbf{R}$ 上の局所有界変動関数とする．$f, g \in C(\mathbf{R})$ で，g および fg が F に関して広義スティルチェス積分可能であるとする．

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} g(t)\, dF(t) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

とおく．このとき，f は G に関して広義スティルチェス積分可能で，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(\lambda)\, dF(\lambda)$$

が成り立つ.

証明 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = b$ なる十分細かい分割と，リーマン和を考えると

$$\sum_{j=0}^{n} f(t'_j)(G(t_{j+1}) - G(t_j)) = \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t'_j) g(t)\, dF(t)$$

となる．ただし $t'_j \in (t_j, t_{j+1})$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して分割を十分細かくすれば,

$$\sup_{s,t \in [t_j, t_{j+1}]} |f(s) - f(t)| < \varepsilon$$

とできる．したがって,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t'_j) g(t)\, dF(t) - \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) g(t)\, dF(t) \right| \\
&\qquad \leqq \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t'_j) - f(t)|\, |g(t)|\, d|F(t)| \\
&\qquad \leqq \varepsilon \sup_{t \in [a,b]} |g(t)| V^{[a,b]} F < \infty.
\end{aligned}$$

ゆえに (1) が成り立つ.
(2) は有界閉区間 $[-N', N]$ で (1) の議論を適用して $N, N' \to \infty$ とすれば得られる.

□

定理 10.14 の証明 スペクトル族による積分の定義から

$$E(t) T_g u = \int_{-\infty}^{t} g(\lambda)\, dE(\lambda) u \tag{10.12}$$

である．したがって,

$$(E(t) T_g u, T_g u) = \|E(t) T_g u\|^2 = \int_{-\infty}^{t} |g(\lambda)|^2\, d(E(\lambda) u, u).$$

ゆえに，補題 10.15 により

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, d(E(t) T_g u, T_g u) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 |g(t)|^2\, d(E(t) u, u) < \infty.$$

これより $T_g u \in D(T_f)$ がわかり，さらに任意の $v \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
(T_f(T_g u), v) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d(E(t) T_g u, v) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\left(\int_{-\infty}^{t} g(s) d(E(s) u, v) \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t)\, d(E(t) u, v) \\
&= (T_{fg} u, v).
\end{aligned}$$

□

10.5 幾何的帯域制限, ウェーブレットとスペクトル写像

本節では, ある与えられたスペクトル族から定まるスペクトル写像の例を二つ解説する. なお本節に限り, 曲面の微分幾何に関連した定理を証明なしに利用する.

▶ **例 5 (幾何的帯域制限関数空間)** 多変数の帯域制限関数について考えてみよう. この場合は 1 変数のときと異なり, 帯域制限をする領域としてさまざまな図形をとりうる. 以下では, $\mathbf{R}^d$ のある種の超曲面で囲まれる領域で帯域制限をした関数空間について調べる. これは, 楕円型偏微分作用素のスペクトル分解と密接な関連があることがわかる. なお, 1 変数の場合は [梅垣] に詳しい議論がある.

$\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ とし,

$$\Omega_t = \{\xi \in \mathbf{R}^d : \phi(\xi) \leqq t\}, \quad \Gamma_t = \{\xi \in \mathbf{R}^d : \phi(\xi) = t\} \qquad (t > 0)$$

とおく. 各 Ω_t はコンパクト領域とし, さらに次の仮定をする: $|\nabla\phi(\xi)| > 0$ $(\xi \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ であり, ある定数 $\Lambda > 0$ とある正の整数 m が存在し,

$$\Lambda|\xi|^m \leqq \phi(\xi) \leqq \Lambda^{-1}|\xi|^m \qquad (\xi \in \mathbf{R}^d).$$

たとえば, $\phi(\xi) = |\xi|^{2k}$ (k は正の整数) はこれらの条件を満たしている. また, 正定値 2 次形式 ψ に対して $\phi(\xi) = \psi(\xi,\xi)$ も同じく条件を満たしている.

さて, 次の帯域制限を考える:

$$BL(\Omega_t) = \{f \in L^2(\mathbf{R}^d) : \mathrm{supp}(\mathcal{F}[f]) \subset \Omega_t\} \qquad (t > 0).$$

そして

$$M(\lambda) = \begin{cases} BL(\Omega_\lambda) & (\lambda > 0) \\ \{0\} & (\lambda \leqq 0) \end{cases}$$

とおくと, 容易に $M(\lambda)$ が定義 10.2 を満たすことがわかる. そこで, $E(\lambda)$ を $L^2(\mathbf{R}^d)$ から $M(\lambda)$ への直交射影とすれば, $\{E(\lambda)\}$ はスペクトル族になる. このとき, $E(\lambda)$ によるスペクトル作用素

$$\int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$$

はどのような作用素になっているであろうか ?

まず, 定義 10.2 のあとの例 2 と同様の方法で

$$E(\lambda)u = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\Omega_\lambda}\mathcal{F}[u]\right] & (\lambda > 0) \\ 0 & (\lambda \leqq 0) \end{cases} \tag{10.13}$$

となることを示すことができる (ただしここで, 集合 A に対して χ_A は A の特性関数を表している). したがって, $\lambda > 0$ のとき $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned} E(\lambda)u &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\chi_{\Omega_\lambda}(\xi)\int_{\mathbf{R}^d} e^{-iy\cdot\xi}u(y)\,dyd\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi}\chi_{\Omega_\lambda}(\xi)\,d\xi\right)u(y)\,dy. \end{aligned}$$

ゆえに

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\chi_{\Omega_\lambda}(\xi)\,d\xi \quad \left(= \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\Omega_\lambda}\right](x)\right)$$

とおくと $E(\lambda)u = K_\lambda * u$ が得られる. ところで, 余積公式 ([酒井, p.94] 参照) より

$$K_{\lambda+h}(x) - K_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_\lambda^{\lambda+h}\left(\int_{\Gamma_t} e^{ix\cdot\zeta}\frac{1}{|\nabla\phi(\zeta)|}\,d\sigma_t(\zeta)\right)dt,$$

ただし, σ_t は $\mathbf{R}^d$ のユークリッド計量から Γ_t に誘導されたリーマン計量に関する測度である. ゆえに

$$\frac{d}{d\lambda}K_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\Gamma_\lambda} e^{ix\cdot\zeta}\frac{1}{|\nabla\phi(\zeta)|}d\sigma_\lambda(\zeta) \quad (x \in \mathbf{R}^d,\ \lambda > 0) \tag{10.14}$$

となる.

さて, f を $\mathbf{R}$ 上の緩増加連続関数とする. このとき,

$$\langle Q_f, w\rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(\phi(\xi))\mathcal{F}^{-1}[w](\xi)\,d\xi \qquad (w \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

として $Q_f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ を定めると, 次が成り立つ.

命題 10.16 $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であれば次が成り立つ:

$$\int_0^\infty f(\lambda)dE(\lambda)u = Q_f * u.$$

証明 $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)u, v) = \left(\frac{d}{d\lambda}K_\lambda * u, v\right) \qquad (\lambda > 0)$$

であるから，$0<\varepsilon<M<\infty$ に対して

$$(2\pi)^d\int_\varepsilon^M f(\lambda)\,d(E(\lambda)u,v)=(2\pi)^d\int_\varepsilon^M f(\lambda)\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)u,v)\,d\lambda$$

$$=\int_\varepsilon^M f(\lambda)\left\{\int_{\mathbf{R}^d}\left(\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\Gamma_\lambda}e^{iy\cdot\zeta}\frac{1}{|\nabla\phi(\zeta)|}\,d\sigma_\lambda(\zeta)u(x-y)\,dy\right)\overline{v(x)}\,dx\right\}d\lambda$$

$$=\int_\varepsilon^M f(\lambda)\int_{\mathbf{R}^d}\left\{\int_{\Gamma_\lambda}e^{iy\cdot\zeta}\frac{1}{|\nabla\phi(\zeta)|}\,d\sigma_\lambda(\zeta)\right\}(u^\vee*\overline{v})(y)\,dyd\lambda.$$

ゆえに

$$\int_\varepsilon^M f(\lambda)\,d(E(\lambda)u,v)=\int_\varepsilon^M f(\lambda)\int_{\Gamma_\lambda}\mathcal{F}^{-1}[u^\vee*\overline{v}](\zeta)\frac{1}{|\nabla\phi(\zeta)|}\,d\sigma_\lambda(\zeta)\,d\lambda$$

$$=\int_\varepsilon^M\int_{\Gamma_\lambda}f(\phi(\zeta))\mathcal{F}^{-1}[u^\vee*\overline{v}](\zeta)\frac{1}{|\nabla\phi(\zeta)|}\,d\sigma_\lambda(\zeta)\,d\lambda$$

$$=\int_{\Omega_M\setminus\Omega_\varepsilon}f(\phi(\xi))\mathcal{F}^{-1}[u^\vee*\overline{v}](\xi)\,d\xi. \tag{10.15}$$

ここで $M\to+\infty$, $\varepsilon\to 0$ とすると，

$$\int_0^\infty f(\lambda)\,d(E(\lambda)u,v)=\langle Q_f,u^\vee*\overline{v}\rangle=(Q_f*u,v).$$ □

この命題から，スペクトル作用素を次のように求めることができる．

定理 10.17　$u\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$\int_0^\infty\lambda\,dE(\lambda)u=\mathcal{F}^{-1}\left[\phi\mathcal{F}[u]\right] \tag{10.16}$$

である．特に，球による帯域制限 $\phi(\xi)=|\xi|^2$ の場合，次のようになる:

$$\int_0^\infty\lambda\,dE(\lambda)u=-\Delta u. \tag{10.17}$$

(10.16) は**フーリエマルチプライヤー**として実解析学で詳しく研究されている．なおこの定理から，$\widetilde{\Delta}$ も $u\in W^2(\mathbf{R}^d)$ に対して (10.17) を満たすことがわかる．　　(例 5 終わり)　□

▶ 例 6 (多重解像度解析から定義されるスペクトル写像)　ウェーブレットのスペクトル写像とよびうるものをここで導入する．$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を多重解像度解析とし，これから本章の例 3 のようにしてスペクトル族 $\{E(t)\}$ をつくる．系 10.13

より，$L^2(\mathbf{R})$ 上の自己共役作用素

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)$$

が定義される．これを**ウェーブレットのスペクトル写像**とよぶ．

W_j を $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ なる V_{j+1} の閉部分空間とする．すでに学んだように，$\{V_j\}$ から定義される直交ウェーブレット $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ に対して $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は W_j の正規直交基底であった．さて，$D(j) = E(j) - E(j-1)$ とすると，$E(t) = E(j)$ $(j \leqq t < j+1)$ より，T は次のように表すことができる:

$$T = \sum_{j\in\mathbf{Z}} jD(j). \tag{10.18}$$

定理 10.18 T は $\{j : j \in \mathbf{Z}\}$ を固有値としてもち，j に属する固有空間は W_{j-1} である．

証明 $D(j) = E(j) - E(j-1)$ が W_{j-1} への直交射影であることに注意すれば，容易に $u \in W_{j-1}$ ならば $Tu = ju$ がわかる．$u \in D(T)$, $u \neq 0$ が $Tu = \lambda u$ を満たしているとする．このとき

$$\sum_j \lambda D(j)u = \lambda u = Tu = \sum_j jD(j)u$$

より，λ はある $j_0 \in \mathbf{Z}$ と一致し，かつ $D(k)u = 0$ $(k \neq j_0)$ がわかる．ゆえに $u \in W_{j_0-1}$ である． □

(例 6 終わり) □

11章

スペクトル分解定理

本章では，前章で予告したスペクトル分解について学ぼう．本章でも $(X, (\ ,\ ))$ は $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間とする．

スペクトル分解定理とは次のものである．

定理 11.1 (スペクトル分解定理) T を $\overline{D(T)} = X$ なる X 上の自己共役作用素とする．このとき，次の (i), (ii) を満たすスペクトル族 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ がただ一つ存在する：

(i) $D(T) = \left\{ u \in X : \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d(E(t)u, u) < \infty \right\}$.

(ii) $Tu = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE(t)u \quad (u \in D(T))$.

この定理は 1929 年にハンガリーの数学者 von Neumann (1903–1957) によって証明された．最初に定理 11.1 の証明のアイデアを述べておこう．証明の困難な点は，一般に自己共役作用素が連続とは限らないことである．そこで，Neumann は自己共役作用素を連続作用素に変換する方法をとった．ヒントは古典的な複素関数論にある．関数論では古くから実軸を単位円周に写す等角写像として，ケーリー変換

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

があることがわかっていた．証明は関数論の教科書にゆずるが，$f(z)$ は上半平面を単位円板に写す等角写像であり，実軸は単位円周に写像されている．

ところで，自己共役作用素の固有値は実軸上に分布しているが，一方，ユニタリー

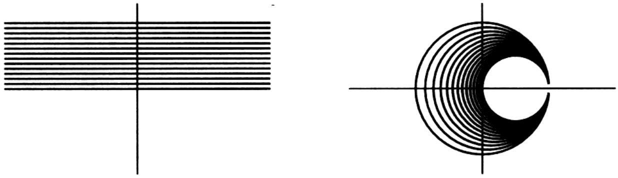


図 11.1　ケーリー変換

作用素の固有値は単位円周上に分布している．したがって，固有値の分布状態から作用素の形態を類推するならば，ケーリー変換を T に適用して $(T-iI)\circ(T+iI)^{-1}$ の形の作用素をつくれば，これがユニタリー作用素になっていることが予想される．ユニタリー作用素はすでに証明したように連続作用素である．そこで，自己共役作用素をケーリー変換の作用素版でユニタリー作用素に変え，次にユニタリー作用素のスペクトル分解を証明する．それから，変数変換でユニタリー作用素のスペクトル分解を自己共役作用素のスペクトル分解に移植する．これが証明のおおまかな方針である．

11.1 ケーリー変換

T を X 上の自己共役作用素とする．このとき，定理 8.22 より $(T+iI)^{-1}$ が X 全体で定義された連続線形作用素として存在する．そこで，

$$U_T = (T-iI)\circ(T+iI)^{-1} = ((T+iI)-2iI)\circ(T+iI)^{-1} \qquad (11.1)$$

が $D(U_T)=X$ なる線形作用素として定義できる．これを T の**ケーリー変換**という．さらに次のことが証明できる．

定理 11.2 T を自己共役作用素とすると，そのケーリー変換 U_T は X 上のユニタリー作用素である．

証明 等式 (8.10) により，$u\in D(T)$ に対して

$$\|U_T\circ(T+iI)u\|^2 = \|(T-iI)u\|^2 = \|Tu\|^2+\|u\|^2 = \|(T+iI)u\|^2$$

である．ゆえに，$x\in X$ に対して

$$\begin{aligned}\|U_Tx\|^2 &= \|U_T\circ(T+iI)\circ(T+iI)^{-1}x\|^2\\ &= \|(T+iI)\circ(T+iI)^{-1}x\|^2 = \|x\|^2\end{aligned}$$

である．したがって，U_T はユニタリー作用素である． □

ケーリー変換は次のような性質をもっている．

定理 11.3 T を自己共役作用素とし，U を T のケーリー変換とする．このとき，次の (1)–(3) が成り立つ:

(1) $R(I-U)=D(T)$.

(2) すべての $u\in X$ に対して，$T\circ(I-U)u=i(I+U)u$.

(3) T' が自己共役作用素で，そのケーリー変換を U' とおく．もし $U=U'$

であるならば，$T = T'$ である．

証明 (1) の証明からはじめる．$x \in D(T)$ とする．$y = (2i)^{-1}(T + iI)x$ とおくと $Uy = (2i)^{-1}(T - iI)x$ である．ゆえに，

$$x = \frac{1}{2i}(T + iI)x - \frac{1}{2i}(T - iI)x = y - Uy \in R(I - U).$$

一方 $x \in R(I-U)$ とすると，$x = (I-U)u$ なる $u \in X$ が存在する．$z = (T+iI)^{-1}u$ とおくと ($(T + iI)^{-1}$ の存在は定理 8.22 による)，

$$Uu = U \circ (T + iI)z = (T - iI)z.$$

したがって

$$x = (I - U)u = (T + iI)z - (T - iI)z = 2iz \in D(T).$$

次に (2) を示す．$u \in X$ とし，$x = (I-U)u$ とする．このとき，$x \in R(I-U) = D(T)$ である．また，z を (1) の証明で定めたものとする．すると，

$$T \circ (I - U)u = Tx = 2iTz = i(I + U)u$$

が得られる．

最後に (3) を証明する．いままで得たことより，

$$D(T) = R(I - U) = R(I - U') = D(T')$$

である．このことと，

$$T \circ (I - U)u = i(I + U)u = T'(I - U)u \qquad (u \in X)$$

となることより，$T = T'$ となる．□

11.2 ユニタリー作用素のスペクトル分解

本節では，ユニタリー作用素がスペクトル分解できることを証明する．まず，次の定理から証明しよう．

定理 11.4 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ をスペクトル族で，$E(-\pi) = 0$, $E(\pi) = I$ であるとする．このとき，

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it}\, dE(t)$$

はユニタリー作用素である．

証明 $x \in X$ とする．区間 $[-\pi, \pi]$ の分割

$$-\pi = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \pi$$

を考え，U の近似和 $\sum_j e^{it_j}E\big((t_j,t_{j+1}]\big)x$ のノルムを計算すると，

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_j e^{it_j}E\big((t_j,t_{j+1}]\big)x\right\|^2 &= \sum_{j,k} e^{it_j}e^{-it_k}\big(E\big((t_j,t_{j+1}]\big)x, E\big((t_k,t_{k+1}]\big)x\big)\\
&= \sum_j \big(E\big((t_j,t_{j+1}]\big)x, x\big)\\
&= \big(E\big((-\pi,\pi]\big)x, x\big) = (x,x) = \|x\|^2
\end{aligned}
$$

である．定理 10.7 の証明より，$\sum_j e^{it_j}E\big((t_j,t_{j+1}]\big)x$ は Ux にノルム収束しているから，容易に $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$ がわかる．全射は定理 10.14 より明らか． □

本節の目的は，この定理の逆を証明することである．定理を証明するために次の補題から証明する．

補題 11.5 U をユニタリー作用素とし，$u \in X$ とする．このとき，$[-\pi,\pi]$ 上の単調増加な関数 ϕ で次の (i)–(iii) を満たすものがただ一つ存在する:

(i) $\phi(-\pi) = 0$,

(ii) $\displaystyle\lim_{\varepsilon>0,\,\varepsilon\to 0}\phi(t+\varepsilon) = \phi(t) \qquad (t \in [-\pi,\pi))$[1],

(iii) 任意の整数 n に対して

$$
(U^n u, u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,d\phi(t).
$$

ただし，ここで右辺の積分はスティルチェス積分である．

証明 U がユニタリーであることより，容易に $U^* = U^{-1}$ が示せる．いま，$u_\ell = (U^\ell u, u)$ $(\ell \in \mathbf{Z})$ とおくと，任意の自然数 m に対して

$$
\begin{aligned}
0 \leqq \frac{1}{m}\left\|\sum_{k=0}^{m-1} e^{ikt}U^k u\right\|^2 &= \frac{1}{m}\sum_{j,k=0}^{m-1} e^{i(k-j)t}(U^k u, U^j u)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{k,j=0}^{m-1} e^{i(k-j)t}u_{k-j}\\
&= \frac{1}{m}\sum_{\ell=-m+1}^{m-1}\left(\sum_{k-j=\ell,\,k,j\in\{0,\ldots,m-1\}} e^{i\ell t}u_\ell\right)\\
&= \sum_{\ell=-m+1}^{m-1}\left(\frac{m-|\ell|}{m}\right)u_\ell e^{i\ell t} \quad (:= p_m(t) \text{ とおく}).
\end{aligned}
$$

---

[1] この性質を**右連続性**という．

また，$|k| \leqq m-1$ に対して

$$u_k = \frac{m}{m-|k|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} p_m(t)\,dt \tag{11.2}$$

が得られる．ここで，

$$\phi_m(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{t} p_m(s)\,ds$$

とおくと，$p_m \geqq 0$ より，ϕ_m は $[-\pi,\pi]$ 上の単調増加関数で，$\phi_m(-\pi)=0$ となっている．また，$c_0(p_m)$ を p_m の 0 番目の複素フーリエ係数とすると

$$\phi_m(\pi) = c_0(p_m) = u_0 = \|u\|^2$$

である．また，(11.2) とスティルチェス積分の定義から，$|k| \leqq m-1$ に対して

$$u_k = \frac{m}{m-|k|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\,d\phi_m(t)$$

となることがわかる．結論を急げば，必要ならば部分列をとって $\lim_{j\to\infty}\phi_{n(j)}$ から容易に求める関数を得ることができるのであるが，極限の存在をはじめ，いくつかのことを確認しておかなければならない．そのため，実関数論でよく知られたヘリーの選出定理を使う．

定理 11.6 (ヘリーの選出定理[2]) f_n $(n=1,2,\ldots)$ を $[a,b]$ 上の単調増加な関数とする．いま，n にも t にも無関係な定数 M で $|f_n(t)| \leqq M$ なるものが存在するとき，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n(j)}\}$ と，ある右連続な単調増加関数 f を選んで，f の連続点 $t \in (a,b)$ および $t=b$ において

$$\lim_{n(j)\to\infty} f_{n(j)}(t) = f(t)$$

が成り立つようにできる．

ヘリーの定理より，ある部分列 $\{\phi_{n(j)}\} \subset \{\phi_n\}$ と $[-\pi,\pi]$ 上の右連続な単調増加な関数 ϕ_∞ を選んで，ϕ_∞ の連続点 t および $t=\pi$ において

$$\phi_{n(j)}(t) \to \phi_\infty(t) \qquad (n\to\infty) \tag{11.3}$$

となるようにできる．そこで，$\phi(t)=\phi_\infty(t)-\phi_\infty(-\pi)$ $(t\in[-\pi,\pi])$ とおく．以下，

$$u_k = \lim_{n(j)\to\infty}\frac{n(j)}{n(j)-|k|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,d\phi_{n(j)}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,d\phi(t) \tag{11.4}$$

となることを証明する．

e^{ikt} は $[-\pi,\pi]$ 上で一様連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して $[-\pi,\pi]$ の分割

$$-\pi = t_0 < t_1 < \cdots < t_\ell = \pi \tag{11.5}$$

[2] 補足 A.2 節参照．

を十分細かくとれば，

$$\sup_{t,s\in[t_j,t_{j+1}]}\left|e^{ikt}-e^{iks}\right|<\varepsilon$$

とできる．一般に，単調増加な有界関数の不連続点は高々可算個であるから (定理 A.2 参照)，分割 (11.5) の分点 t_j が ϕ の不連続点にならないようにとることができる．そこでは，(11.3) が成り立っていることに注意しておく．さて，次の不等式

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}d\phi_{n(l)}(t)-\sum_j e^{ikt_j}(\phi_{n(l)}(t_{j+1})-\phi_{n(l)}(t_j))\right|\\
&=\left|\sum_j\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{ikt}d\phi_{n(l)}(t)-e^{ikt_j}(\phi_{n(l)}(t_{j+1})-\phi_{n(l)}(t_j))\right)\right|\\
&=\left|\sum_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(e^{ikt}-e^{ikt_j}\right)d\phi_{n(l)}(t)\right|\\
&\leqq\sum_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|e^{ikt}-e^{ikt_j}\right|d\phi_{n(l)}(t)\\
&\leqq\varepsilon\sup_t\phi_{n(l)}(t)\\
&=\varepsilon\|u\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$\lim_{n(l)\to\infty}\sum_j e^{ikt_j}(\phi_{n(l)}(t_{j+1})-\phi_{n(l)}(t_j))=\sum_j e^{ikt_j}(\phi(t_{j+1})-\phi(t_j))$$

であり，右辺はスティルチェス積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,d\phi(t)$ の近似和であるから，結局，

$$\lim_{n(l)\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,d\phi_{n(l)}(t)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,d\phi(t)$$

がわかる．したがって，(11.4) が証明された．

最後に，ϕ の一意性を証明しよう．補題 11.5 の (i), (ii), (iii) を満たす単調増加な関数 ϕ, ϕ' が存在したとする．このとき，$w=\phi-\phi'$ とおくと，w は

(iv) $w(-\pi)=0$,

(v) w は右連続な有界変動関数,

(vi) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dw(t)=0 \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$

を満たす．ワイエルシュトラスの多項式近似定理より，周期 2π の任意の連続関数は $\{e^{ikt}\}_{k=0,\pm1,\pm2,\dots}$ の一次結合で一様に近似できるから，(vi) より周期 2π の任意の連続関数 f に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dw(t)=0 \tag{11.6}$$

がわかる．そこで，$-\pi < t < t' < \pi$ なる w の連続点 t, t' を任意にとり，十分大きな n に対して $[-\pi, \pi]$ 上の連続関数で

$$f_n(s) = \begin{cases} 0 & (s \in [-\pi, t] \cup [t', \pi]) \\ 1 & (s \in [t + (1/n), t' - (1/n)]) \\ 1\text{ 次関数} & (\text{その他}) \end{cases}$$

となるものを考える．(11.6) により

$$w(t) - w(t') = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(s)\, dw(s) = 0$$

がわかる．これより，w の連続点上では w は一定の値 c をとることがわかる．w の不連続点は高々可算個しかないので，w の連続点は $[-\pi, \pi]$ で稠密な集合をなす．さらに，w は $[-\pi, \pi)$ で右連続であるから，$w(t) = c\ (t \in [-\pi, \pi))$ である．ところが $w(-\pi) = 0$ であるから，$c = 0$ でなければならない．また，(11.6) において $f = 1$ なる関数を考えれば，$w(\pi) = w(\pi) - w(-\pi) = 0$ がいえる． □

ユニタリー作用素のスペクトル分解を証明する．

定理 11.7 U をユニタリー作用素とする．このとき，次の (i), (ii) を満たす単位の分解 $\{F(t) : t \in \mathbf{R}\}$ がただ一つ存在する:

(i) $F(-\pi) = 0,\ \ F(\pi) = I$,

(ii) $(U^n u, v) = \displaystyle\int_{\pi}^{-\pi} e^{int}\, d(F(t)u, v) \quad (u, v \in X;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

証明 前補題で得られた右連続な単調増加関数 $\phi(t)$ を $\phi(t; u)$ $(t \in [-\pi, \pi],\ u \in X)$ と表す．さらに，$t \in [-\pi, \pi]$, $u, v \in X$ に対して

$$\phi(t; u, v) = \frac{1}{4}\{\phi(t; u + v) - \phi(t, u - v) + i\phi(t; u + iv) - i\phi(t; u - iv)\}$$

とおく．明らかに $\phi(t; u, v)$ は t の関数として $[-\pi, \pi]$ で右連続な有界変動関数であり，

$$\phi(-\pi; u, v) = 0. \tag{11.7}$$

また，

$$\begin{aligned} 4(U^n u, v) = {} & (U^n(u + v), u + v) - (U^n(u - v), u - v) \\ & + i(U^n(u + iv), u + iv) - i(U^n(u - iv), u - iv) \end{aligned}$$

であるから，

$$(U^n u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d\phi(t; u, v) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{11.8}$$

が成り立つ．ところで，補題 11.5 の証明と同様にして，(11.7), (11.8) を満たす右連続

な有界変動関数はただ一つに限ることがわかる．この一意性と，

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d\phi(t;u,v) = (U^n u, v)$$
$$= \overline{(U^{-n}v, u)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\overline{\phi(t;v,u)}$$

となっていることより，

$$\phi(t;u,v) = \overline{\phi(t,v,u)} \tag{11.9}$$

がわかる．また，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$, $u_1, u_2 \in X$ に対して

$$(U^n(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v) = \alpha_1 (U^n u_1, v) + \alpha_2 (U^n u_2, v)$$

であることと，$\phi(t;u,v)$ の一意性から，

$$\phi(t;\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \phi(t;u_1,v) + \alpha_2 \phi(t;u_2,v) \tag{11.10}$$

が得られる．

また，(11.9), (11.10) と内積に関するシュヴァルツの不等式と同様にして

$$|\phi(t;u,v)|^2 \leqq \phi(t;u,u)\phi(t;v,v)$$
$$\leqq \phi(\pi;u,u)\phi(\pi;v,v) \leqq \|u\|^2 \|v\|^2$$

となる．

以上のことから，$\phi(t;v,u)$ は $v \in X$ に関して X 上の連続線形汎関数になっている．したがって，リースの定理より，

$$\phi(t;u,v) = \overline{\phi(t;v,u)} = \overline{(v, F(t)u)} = (F(t)u, v) \qquad (v \in X)$$

を満たす $F(t)u \in X$ がただ一つ存在する．さらに (11.10) により，写像 $F(t) : u \mapsto F(t)u$ は，X 全体で定義された線形作用素になっていることがわかる．$F(t)$ は $t \in [-\pi, \pi]$ に対して定義されているが，$F(t)$ を $\mathbf{R}$ 全体で定義するため，$t \in (-\infty, -\pi)$ に対して $F(t) = 0$，$t \in (\pi, \infty)$ に対しては $F(t) = I$ と定義しておく．このように $F(t)$ を定義すると，$\{F(t) : t \in \mathbf{R}\}$ が求めるスペクトル族になっていることを以下に証明する．

まず，

$$\|F(t)u\|^2 = |\phi(t;u,F(t)u)| \leqq \|u\|\,\|F(t)u\|$$

より $\|F(t)u\| \leqq \|u\|$ となり，$F(t)$ は連続である．また，

$$(F(t)u, v) = \phi(t;u,v) = \overline{\phi(t;v,u)} = \overline{(F(t)v, u)} = (u, F(t)v)$$

より，$F(t)$ は自己共役である．

$F(-\pi) = 0$, $F(\pi) = I$ であることと，$\phi(t;u,v)$ の $[-\pi,\pi)$ での右連続性から，$(F(t)u, v)$ が $\mathbf{R}$ で右連続であることがわかる．さらに，次が成り立つ:

$$(U^n u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\phi(t;u,v) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d(F(t)u, v).$$

次に，$F(t)F(s) = F(\min\{t,s\})$ を証明しよう．

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d(F(t)U^m u, v) &= (U^n U^m u, v) = (U^{n+m}u, v)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+m)t}\, d(F(t)u, v)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\left\{\int_{-\pi}^{t} e^{ims}\, d(F(s)u, v)\right\}.\end{aligned}$$

$(F(s)u, v)$ は右連続単調増加関数の一次結合であるから，上式の $\{\ \}$ の中身は t に関して右連続になり，補題 11.5 における一意性より，

$$\begin{aligned}(F(t)U^m u, v) &= \int_{-\pi}^{t} e^{ims}\, d(F(s)u, v)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ims}\, d(F(\min\{t,s\})u, v).\end{aligned}$$

一方，$t \in \mathbf{R}$ を固定しておくと，

$$\begin{aligned}(F(t)U^m u, v) = (U^m u, F(t)v) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ims}\, d(F(s)u, F(t)v)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}\, d(F(t)F(s)u, v)\end{aligned}$$

がわかる．ゆえに，$F(t)F(s) = F(\min\{s,t\})$ を得る．

これより，$F(t)F(t) = F(t)$ でもあるから $F(t)$ が直交射影になることもわかる．したがって，$\varepsilon > 0$ を $\varepsilon \to 0$ としたとき，

$$\|F(t+\varepsilon)u - F(t)u\|^2 = (F(t+\varepsilon)u - F(t)u, u) \to 0$$

であるから，$F(t)u$ の X での右連続性も得られる．よって，$F(t)$ がスペクトル族であることが証明できる (実際 $M(t) = R(F(t))$ を考えればよい)．

F の一意性は，補題 11.5 における ϕ の一意性より明らかである． □

11.3 自己共役作用素のスペクトル分解

準備が整ったので，本章の目的である自己共役作用素のスペクトル分解定理の証明をする．もう一度，定理を述べておこう．

定理 11.1 (スペクトル分解定理) T を $\overline{D(T)} = X$ なる X 上の自己共役作用素とする．このとき，次の (i), (ii) を満たすスペクトル族 $\{E(t) : t \in \mathbf{R}\}$ がただ一つ存在する:

(i) $D(T) = \left\{ u \in X : \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, d(E(t)u, u) < \infty \right\}$,

(ii) $Tu = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE(t)u \qquad (u \in D(T))$.

証明 T のケーリー変換を U とする．$-U$ はユニタリー作用素であるから，

$$-U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} \, dF(t)$$

とスペクトル分解できる．$\lambda(t) = -\cot((t+\pi)/2)$ と変数変換し，$E(\lambda(t)) = F(t)$ とおく．このとき $\{E(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ は明らかにスペクトル族である．

$$T' = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)$$

とおく．T' は自己共役作用素であるから，$(T' + iI)^{-1} \in B(X)$ が存在する．これが

$$(T' + iI)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + i} \, dE(\lambda)$$

と表されていることを示す．

まず，右辺のスペクトル作用素を S とおく．S の定義域であるが，任意の $u \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + i|^2} \, d(E(\lambda)u, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + 1} \, d(E(\lambda)u, u) \\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} d(E(\lambda)u, u) \\ &= \|u\|^2 < \infty\end{aligned}$$

であるから，$D(S) = X$ である．ここで $f(\lambda) = \lambda$, $g(\lambda) = 1/(\lambda + i)$ とする．定理 10.14 の記号を使えば，$T_f = T'$, $T_g = S$ である．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \, d(E(\lambda)u, u) &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} d(E(\lambda)u, u) \\ &= \|u\|^2\end{aligned}$$

より $D(T_{fg}) = X$ であるから，$u \in X = D(T_{fg}) \cap D(T_g)$ に対して

$$T' \circ Su = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + i} \, dE(\lambda)u$$

である．したがって，

$$((T' + iI) \circ Su, v) = \int_{-\infty}^{\infty} d(E(\lambda)u, v) = (u, v).$$

これより，$(T'+iI)\circ Su=u$ である．ゆえに，

$$Su=(T'+iI)^{-1}\circ(T'+iI)Su=(T'+iI)^{-1}u$$

となる．これを使って $T=T'$ を示す．

$$((T'-iI)\circ Su,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\,d(E(\lambda)u,v)$$

であり，$(\lambda(t)-i)/(\lambda(t)+i)=-e^{it}$ であるから，

$$((T'-iI)\circ Su,v)=-\int_{-\pi}^{\pi}e^{it}\,d(F(t)u,v)=(Uu,v).$$

ゆえに，$(T'-iI)\circ(T'+iI)^{-1}=U$ となる．左辺は T' のケーリー変換，そして右辺は T のケーリー変換であるから，$T'=T$ となる．

最後にスペクトル分解の一意性を証明する．$E(\lambda)$, $E'(\lambda)$ を T の二つのスペクトル分解し，T のケーリー変換を U とする．$\lambda=-\cot((t+\pi)/2)$ で変数変換すると，$F(t)=E(\lambda(t))$, $F'(t)=E'(\lambda(t))$ はどちらも $-U$ のスペクトル分解になっている．U のスペクトル分解の一意性より $F=F'$ である．よって $E(\lambda)=E'(\lambda)$ がわかる． □

12章

自己共役作用素のスペクトルとレゾルベント

本章では自己共役作用素 T の固有値やレゾルベントが，T のスペクトル族を使って特徴づけられることを証明する．また，ラプラス作用素やクーロンポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素のスペクトルについて詳述する．

ここでは，T をヒルベルト空間 $(X, (\cdot,\cdot))$ 上の自己共役作用素とし，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ を T のスペクトル分解を与えるスペクトル族とする．また，$M(\lambda) = R(E(\lambda))$ とおく (定義 10.2 参照).

12.1 レゾルベントの特徴づけ

まず，T のレゾルベント集合とスペクトル族との関係について述べよう．すでに示したように，T のレゾルベント集合は $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ を含んでいる．残りは，実軸上にある可能性があるが，それは次のように特徴づけられる．

定理 12.1 $\lambda\in\mathbf{R}$ とする．$\lambda\in\rho(T)$ であるための必要十分条件は，λ を含むある開区間 (λ', λ'') が存在し，$E(\mu)$ が $\mu\in(\lambda',\lambda'')$ で一定になることである．

証明 $\lambda\in\rho(T)$ とすると，$(T-\lambda I)^{-1}\in B(X)$ であるから，

$$\|u\| = \|(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda I)u\| \leqq M\|(T-\lambda I)u\| \qquad (u\in X)$$

を満たす u に依存しないような定数 $M>0$ が存在する．$0<b<M^{-1}$ なる b をとる．$u\in X$ に対して，$v=(E(\lambda+b)-E(\lambda-b))u$ とおくと，

$$\begin{aligned} M^{-2}\|v\|^2 &\leqq \|(T-\lambda I)v\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mu-\lambda|^2\, d(E(\mu)v,v) \\ &= \int_{\lambda-b}^{\lambda+b} |\mu-\lambda|^2 d(E(\mu)v,v) \\ &\leqq b^2\int_{\lambda-b}^{\lambda+b} d(E(\mu)v,v) = b^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

これより，$v=0$ でなければならない．ゆえに $E(\lambda+b)=E(\lambda-b)$ である．$\lambda-b<\lambda'<\lambda+b$ については

$$
\begin{aligned}
E(\lambda') = E(\min\{\lambda',\lambda+b\}) &= E(\lambda+b)E(\lambda') \\
&= E(\lambda-b)E(\lambda') = E(\lambda-b).
\end{aligned}
$$

これより，$E(\mu)$ は $(\lambda-b,\lambda+b)$ で一定である．

逆に，$E(\mu)$ が (λ',λ'') で一定であるとする．必要ならば (λ',λ'') を少し小さくして $E(\lambda')=E(\lambda'')$ とできる．このとき，$\lambda\in(\lambda',\lambda'')$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\|(T-\lambda I)u\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mu-\lambda|^2\, d(E(\mu)u,u) \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda'} |\mu-\lambda|^2\, d(E(\mu)u,u) + \int_{\lambda''}^{\infty} |\mu-\lambda|^2\, d(E(\mu)u,u) \\
&\geqq \min\{\lambda-\lambda',\lambda''-\lambda\}^2 \left(\int_{-\infty}^{\lambda'} + \int_{\lambda''}^{\infty}\right) d(E(\mu)u,u) \\
&= \min\{\lambda-\lambda',\lambda''-\lambda\}^2 \|u\|^2.
\end{aligned}
$$

したがって $T-\lambda I$ は 1 対 1 である．ゆえに，補題 8.23 (2) より，$X=\overline{R(T-\lambda I)}$ がわかる．また，上の不等式を使えば，定理 8.22 の証明と同様にして，$X=R(T-\lambda I)$ も示すことができる．よって $(T-\lambda I)^{-1}\in B(X)$ であり，$\lambda\in\rho(T)$ が得られる．　□

この定理から，T のスペクトル族による積分表示において，T のレゾルベント集合の部分は積分にはまったく寄与していないことがわかる．すなわち，

$$
\sigma(T) = \mathbf{C}\setminus\rho(T)
$$

とすると，じつは

$$
T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dE(\lambda)
$$

なのである．$\sigma(T)$ を T の**スペクトル集合**という．

次節では，スペクトル集合について調べる．

12.2 自己共役作用素のスペクトル集合

本節では，スペクトル集合をスペクトル族 $\{E(\lambda)\}$ を使って特徴づける．まず，$\|E(\lambda-0)x\|\leqq\|x\|$ $(x\in X)$ かつ $E(\lambda-0)E(\lambda-0)=E(\lambda-0)$ より，$M(\lambda-0)=R(E(\lambda-0))$ が $M(\lambda)$ の閉部分空間であることに注意しておく．

次が成り立つ．

定理 12.2　$\lambda \in \mathbf{R}$ が T の固有値であるための必要十分条件は，$E(\lambda) \neq E(\lambda - 0)$ なることである．このとき，λ に属する固有空間は

$$R(E(\lambda) - E(\lambda - 0)) = M(\lambda) \ominus M(\lambda - 0)$$

である．

証明　λ を T の固有値とし，u をその固有ベクトルとする．このとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mu - \lambda|^2 \, d(E(\mu)u, u) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda) \, dE(\mu)u \right\|^2$$
$$= \|(T - \lambda I)u\|^2 = 0$$

であるから，$(E(\mu)u, u)$ は $\mu \in (-\infty, \lambda)$ に対して一定であり，また，$\mu \in (\lambda, \infty)$ に対しても一定である．

一方 $E(\infty) = I$, $E(-\infty) = 0$ より，$\mu \in (-\infty, \lambda)$ のときは，$E(\mu)u = 0$ である．また，$\mu \in (\lambda, \infty)$ の場合は $\|E(\mu)u\|^2 = (E(\mu)u, u) = \|u\|^2$ であるが，これより

$$\|E(\mu)u - u\|^2 = \|E(\mu)u\|^2 + \|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(E(\mu)u, u) = 0$$

となる．すなわち $E(\mu)u = u$ である．

結局，$E(\lambda - 0)u = 0$, $E(\lambda)u = E(\lambda + 0)u = u$ である．さらに

$$u = (E(\lambda) - E(\lambda - 0))u \in R(E(\lambda) - E(\lambda - 0))$$

がわかる．

逆に，$E(\lambda) \neq E(\lambda - 0)$ とすると，$u \in R(E(\lambda) - E(\lambda - 0))$ $(u \neq 0)$ が存在する．このとき，ある $v \in X$ に対して $u = (E(\lambda) - E(\lambda - 0))v$ となっているから，

$$(E(\lambda) - E(\lambda - 0))u = (E(\lambda) - E(\lambda - 0))^2 v$$
$$= (E(\lambda) - E(\lambda - 0))v = u$$

である．したがって，

$$E(\mu)u = E(\mu)(E(\lambda) - E(\lambda - 0))u = u \qquad (\lambda < \mu),$$
$$E(\mu)u = E(\mu)(E(\lambda) - E(\lambda - 0))u = 0 \qquad (\mu < \lambda)$$

となっている．したがって，

$$Tu = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, dE(\mu)u = \lambda(E(\lambda) - E(\lambda - 0))u = \lambda u.$$

ゆえに λ は T の固有値であり，λ はその固有ベクトルである．　□

さて，真性スペクトルに対しては次のことがわかる．

定理 12.3 $\lambda \in \mathbf{R}$ とする.

(1) $\dim M(\lambda) \ominus M(\lambda - 0) = \infty$ ならば λ は真性スペクトルに属する. なお一般にベクトル空間 V に対して, V の次元が有限でないとき $\dim V = \infty$ と表す.

(2) λ が真性スペクトルに属するための必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\dim M(\lambda + \varepsilon) \ominus M(\lambda - \varepsilon) = \infty$$

となることである.

(3) $\lambda \in \sigma(T)$ が $\sigma(T)$ の集積点ならば, 真性スペクトルに属する.

証明 (1) 仮定より $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset D(T) \setminus \{0\}, Tx_j = \lambda x_j$ でしかも一次独立なものが存在する. グラム・シュミットの直交化法により, $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ は正規直交系であることを仮定してもよい. このとき,

$$\|x_j - x_k\|^2 = \|x_j\|^2 + \|x_k\|^2 = 2 \qquad (j \neq k)$$

であるから, x_j は λ に関するワイル列になっている. ゆえに, λ は真性スペクトルに属する.

(2) を証明するため次の二つの補題を示す.

補題 12.4 M を X の有限次元部分空間とする. M の点列 $\{x_j\}_{j=1,2,\ldots}$ が $\sup_j \|x_j\| < \infty$ を満たすならば, $\{x_j\}_{j=1,2,\ldots}$ の部分列 $\{x_{j(k)}\}_{k=1,2,\ldots}$ と $x \in M$ が存在し, $\lim_{k\to\infty} x_{j(k)} = x$ が成り立つ.

証明 $\dim M = n$ とする. グラム・シュミットの方法で M の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ の存在がわかる. $u \in M$ に $((u, u_1), \ldots, (u, u_n)) \in \mathbf{R}^n$ を対応させる M から $\mathbf{R}^n$ への写像を U とおく. このとき, パーセヴァルの等式 (定理 6.5) により, $\|u\| = |Uu|$ が成り立つ. また, U は M から $\mathbf{R}^n$ への全単射になっている. さて, Ux_j は $\mathbf{R}^n$ の有界点列である. 一方, ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により, $\mathbf{R}^n$ の有界点列は $\mathbf{R}^n$ 内の点に収束する部分列を含む. したがって, この収束部分列とその極限点を U^{-1} で M 上に写せば補題が証明される. □

補題 12.5 $\lambda \in \mathbf{R}$ が $\dim N(T - \lambda I) < \infty$ を満たすものとし, S を $D(S) = D(T) \cap \overline{R(T - \lambda I)}$ で,

$$Sx = Tx \qquad (x \in D(S))$$

により定義される作用素とする. λ が T の真性スペクトルに属するならば, λ に関する S のワイル列が存在する.

証明 補題 8.23 より $X = \overline{R(T - \lambda I)} \oplus N(T - \lambda I)$ である. $\{f_j\}_{j=1,2,\ldots}$ を T

のワイル列とし,

$$f_j = g_j + h_j \qquad (g_j \in \overline{R(T-\lambda I)},\ h_j \in N(T-\lambda I))$$

なる直交分解とする．$\{g_j\}$ が S のワイル列であることを示す．$f_j \in D(T)$, $h_j \in D(T)$ より，$g_j \in D(T)$ であり，

$$Sg_j - \lambda g_j = Tf_j - \lambda f_j \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

である．さて，もし $\{g_j\}$ が収束部分列 $\{g_{j(k)}\}$ を含んでいたとする．このとき，

$$\sup_j \|h_j\| \leqq \sup_j \|f_j\| < \infty$$

であり，$h_{j(k)} \in N(T-\lambda I)$ で $N(T-\lambda I)$ は有限次元であるから，補題 12.4 より $\{h_{j(k)}\}$ は収束部分列 $\{h_{j(k)'}\}$ を含む．したがって，$\{f_{j(k)'}\}$ は収束列になっている．これは f_j がワイル列であることに反する． □

定理 12.3 (2) の証明を続ける．任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &M(\lambda+\varepsilon) \ominus M(\lambda-\varepsilon) \\ &= (M(\lambda+\varepsilon) \ominus M(\lambda)) \oplus (M(\lambda) \ominus M(\lambda-0)) \oplus (M(\lambda-0) \ominus M(\lambda-\varepsilon)) \end{aligned}$$

である．

いま，λ が T の真性スペクトルに属するとする．$\dim M(\lambda) \ominus M(\lambda-0) < \infty$ の場合を証明すれば十分である．このとき，ある $\varepsilon_0 > 0$ で

$$\dim M(\lambda+\varepsilon_0) \ominus M(\lambda) < \infty, \qquad \dim M(\lambda-0) \ominus M(\lambda-\varepsilon_0) < \infty$$

なるものが存在するとして矛盾を導く．この仮定のもとに，すべての $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ に対して，$M(\lambda+\varepsilon) \ominus M(\lambda)$ および $M(\lambda-0) \ominus M(\lambda-\varepsilon)$ は有限次元になる．したがって，補題 12.4 より容易に，ある $0 < \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_0$ が存在し，任意の $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1$ に対して

$$M(\lambda+\varepsilon) \ominus M(\lambda) = \{0\}, \qquad M(\lambda-0) \ominus M(\lambda-\varepsilon) = \{0\}$$

となることが示せる．

さて，$x \in \overline{R(T-\lambda I)} = N(T-\lambda I)^\perp$ を任意にとる．このとき，定理 12.2 により $N(T-\lambda I) = M(\lambda) \ominus M(\lambda-0)$ であるから，$(E(\lambda) - E(\lambda-0))x = 0$ である．ゆえに $\|E(\lambda)x\| = \|E(\lambda-0)x\|$ となる．そして $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_1$ に対しては，$E(\lambda+\varepsilon) = E(\lambda)$ かつ $E(\lambda-0) = E(\lambda-\varepsilon)$ であるから，ある定数 c が存在し，

$$\|E(s)x\| = c \qquad (\forall s \in [\lambda-\varepsilon_1, \lambda+\varepsilon_1])$$

となる．

いま，S を補題 12.5 のものとし，$x \in D(S)$ とする．$x \in \overline{R(T-\lambda I)}$ であるから，

$$\|Sx - \lambda x\|^2 = \|Tx - \lambda x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (s-\lambda)^2\, d\|E(s)x\|^2$$

$$= \int_{(-\infty,\lambda-\varepsilon_1)\cup(\lambda+\varepsilon_1,\infty)} (s-\lambda)^2\, d\|E(s)x\|^2$$

$$\geqq \varepsilon_1^2 \int_{(-\infty,\lambda-\varepsilon_1)\cup(\lambda+\varepsilon_1,\infty)} d\|E(s)x\|^2 = \varepsilon_1^2\|x\|^2.$$

これにより λ に関する S のワイル列は存在しえない．ところが，補題 12.5 より λ に関する S のワイル列が存在する．これは矛盾である．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dim M(\lambda+\varepsilon)\ominus M(\lambda-\varepsilon) = \infty$ でなければならない．

逆に，$\dim M(\lambda+\varepsilon)\ominus M(\lambda-\varepsilon) = \infty$ とする．(i) より $\dim M(\lambda)\ominus M(\lambda-0) < \infty$ の場合を証明すれば十分である．この場合，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\dim M(\lambda+\varepsilon)\ominus M(\lambda) + \dim M(\lambda-0)\ominus M(\lambda-\varepsilon) = \infty$$

である．$\{M(\lambda+\varepsilon)\ominus M(\lambda)\}$, $\{M(\lambda-0)\ominus M(\lambda-\varepsilon)\}$ は ε に関する増大列であるから，すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\dim M(\lambda+\varepsilon)\ominus M(\lambda) = \infty$ であるか，あるいはすべての $\varepsilon > 0$ に対して $\dim M(\lambda-0)\ominus M(\lambda-\varepsilon) = \infty$ であるかの，少なくとも一方が成り立つ．まず前者が成り立っている場合を考える．この場合，

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > \lambda, \qquad \lim_{j\to\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} b_j = \lambda$$

なる実数列を，$M(a_j)\ominus M(b_j) \ni x_j$ で $\|x_j\| = 1$ なるものが存在するようにとれる．ここで，$\{x_j\}_{j=1,2,\dots}$ は X の正規直交列である．また，

$$\begin{aligned}
\|Tx_j - \lambda x_j\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (s-\lambda)^2\, d\|E(s)x_j\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (s-\lambda)^2\, d\|E(s)(E(a_j)-E(b_j))x_j\|^2 \\
&= \int_{b_j}^{a_j} (s-\lambda)^2\, d\|E(s)x_j\|^2 \\
&\leqq (a_j-\lambda)^2 \to 0 \qquad (j\to\infty).
\end{aligned}$$

よって，$\{x_j\}$ は λ に関する T のワイル列である．

他の場合が成り立つときも同様にして示すことができる．

(3) λ が $\sigma(T)$ の集積点ならば，λ に収束する $\sigma(T)$ の狭義単調な増加列か減少列 $\lambda_n\ (n = 1, 2, \dots)$ がとれる．$\lambda_n \uparrow \lambda$ の場合，

$$M_n = M((\lambda_n + \lambda_{n+1})/2)\ominus M((\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2)$$

とすると，$M_n \neq \{0\}$ かつ M_n は互いに直交している．(a, b) を λ を含む開区間とすると，十分大きな任意の n に対して $\lambda_n \in (a, b)$ であるから，

$$M(b)\ominus M(a) \supset M_n \oplus M_{n+1} \oplus \cdots$$

である．ゆえに，$\dim(M(b)\ominus M(a)) = \infty$ となり，λ が真性スペクトルに属することがわかる．$\lambda_n \downarrow \lambda$ の場合も同様に証明できる． □

この定理の証明から次は明らかである.

系 12.6 $\lambda \in \mathbf{R}$ が自己共役作用素 T の真性スペクトルであれば, λ に関する T のワイル列で正規直交系になっているものが存在する (これを**正規直交ワイル列**という).

さて, $\sigma(T)$ の孤立点のうち多重度有限の固有値全体のなす集合を**離散スペクトル**という. スペクトル集合について次がわかる.

定理 12.7 T を自己共役作用素とする. このとき, $\sigma(T)$ は T の離散スペクトルと真性スペクトルの和集合である.

証明 定義より, $\lambda \in \sigma(T)$ であるための必要十分条件は, 次の (i) または (ii) を満たすことである:

(i) λ は T の固有値である.

(ii) $(T-\lambda I)^{-1}$ は存在するが, $B(X)$ には属さない.

まず (i) の場合, 定理 12.2, 12.3 より, λ は離散スペクトルか真性スペクトルに属する.

次に, (ii) の場合を考える. λ に関するワイル列の存在を示す. そのため, 次の二つの補題を示しておく.

補題 12.8 $R(T-\lambda I)$ は X で稠密である.

証明 もしも稠密でないとして矛盾を導く. 稠密でないとすると, 直交分解定理より, $v \in \overline{R(T-\lambda I)}^{\perp}$ で $v \neq 0$ なるものが存在する. 任意の $u \in D(T)$ に対して, $(Tu-\lambda u, v) = 0$ であるから,

$$(Tu, v) = (u, \bar{\lambda} v)$$

である. ゆえに, T の自己共役性より $v \in D(T^*) = D(T)$ で $Tv = T^*v = \bar{\lambda} v$ である. また T が自己共役であることより, λ は実数でなければならない. したがって $\bar{\lambda} = \lambda$ となり, $(T-\lambda I)v = 0$ が得られる. これは, $T-\lambda I$ が 1 対 1 でないことを示しているので, (2) の仮定に反する. □

補題 12.9 任意の $u \in D((T-\lambda I)^{-1})$ に対して,

$$\|(T-\lambda I)^{-1}u\| \leqq c\|u\|$$

を満たす (u に依存しない) 正定数 c は存在しない.

証明 もし, 補題の正定数 c が存在するものとして矛盾を導く. 補題 12.8 より, $D((T-\lambda I)^{-1}) = R(T-\lambda I)$ は X で稠密であるから, 任意の $u \in X$ に対して, $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ を満たす $u_n \in D((T-\lambda I)^{-1})$ が存在する. 仮定より, $\{(T-\lambda I)^{-1}u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X のコーシー列である. $T = T^*$ であるから, 命題 8.17

(3) より T は閉作用素である．したがって，系 8.13 より $(T-\lambda I)^{-1}$ も閉作用素である．ゆえに $u \in D((T-\lambda I)^{-1})$ である．すなわち $D((T-\lambda I)^{-1}) = X$ がわかる．結局，仮定より $(T-\lambda I)^{-1} \in B(X)$ となり，(2) に矛盾することになる．□

以上の準備のもとに，定理 12.7 の証明を続行する．補題 12.9 より，

$$\|(T-\lambda I)^{-1}v_n\| > n\|v_n\| > 0$$

なる v_n が存在する．そこで

$$u_n = \frac{(T-\lambda I)^{-1}v_n}{\|(T-\lambda I)^{-1}v_n\|}$$

とおく．これが λ に関するワイル列であることを示す．$\|u_n\| = 1$, $u_n \in D(T)$ であり，

$$\|Tu_n - \lambda u_n\| = \frac{\|v_n\|}{\|(T-\lambda I)^{-1}v_n\|} < \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となっている．あとは，$\{u_n\}$ が収束部分列をもたないことを示せばよい．もし収束部分列 $\{u_{n(k)}\}$ をもっていたとすると，その極限 u も $\|u\| = 1$ である．しかも

$$Tu_{n(k)} = (T-\lambda I)u_{n(k)} + \lambda u_{n(k)} \to \lambda u \qquad (k \to \infty)$$

となる．T は閉作用素であるから，$u \in D(T)$ かつ $Tu = \lambda u$ ということになり，これは $(T-\lambda I)^{-1}$ が存在することに反する．以上で，$\sigma(T)$ の元は離散スペクトルか真性スペクトルに属することが証明された．

最後に，λ が離散スペクトルか真性スペクトルに属するときに，$\lambda \in \sigma(T)$ であることを示す．定義から，λ が真性スペクトルに属する場合のみ考えれば十分である．このとき，$\lambda \in \rho(T)$ であるとして矛盾を導く．$\lambda \in \rho(T)$ ならば，$(T-\lambda I)^{-1} \in B(X)$ である．$\{u_n\}$ を λ のワイル列であるとすると

$$\begin{aligned}\|u_n\| &= \|(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda I)u_n\| \\ &\leqq \|(T-\lambda I)^{-1}\|\,\|(T-\lambda I)u_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).\end{aligned}$$

ゆえに，u_n は 0 に収束する．これは，$\{u_n\}$ がワイル列であることに反する．□

偏微分方程式に応用するうえで，次の概念は重要である．

定義 12.1　T を自己共役作用素とし，ある $m \in \mathbf{R}$ に対して

$$(Tu, u) \geqq m\|u\|^2 \qquad (u \in D(T)) \tag{12.1}$$

を満たしているとする．このとき，T は**下に有界**であるという．特に $m = 0$ で成り立つとき T は**半正定値**，$m > 0$ で成り立つときは**正定値**であるという．

たとえば，$-\Delta$ の閉包 $-\overline{\Delta}$ は半正定値な自己共役作用素である．実際，$u \in$

$C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ ならば，部分積分の公式より

$$(-\Delta u, u) = \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \geqq 0$$

である．したがって，$W^2(\mathbf{R}^d)$ に対しても，$C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ が稠密であることを使って，同じ不等式が証明できる．

系 12.10　T を (12.1) を満たす下に有界な自己共役作用素とする．このとき，$E(\mu) = 0$ $(\mu \in (-\infty, m))$ であり，次が成り立つ:

$$T = \int_m^\infty \lambda \, dE(\lambda).$$

証明　$\mu < m$ とする．このとき，

$$\|(T - \mu I)u\|^2 = ((T - \mu I)u, u) = (Tu, u) - \mu\|u\|^2 \geqq (m - \mu)\|u\|^2$$

である．したがって，定理 12.1 の証明と同じようにして，$\mu \in \rho(T)$ がわかる．したがって，$E(-\infty) = 0$ より，$E(\mu) = 0$ $(\mu \in (-\infty, m))$ が得られる．　□

12.3　ラプラス作用素，シュレーディンガー作用素のスペクトル

本節では，ラプラス作用素とクーロンポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素のスペクトル集合について述べる．

12.3.1　$\mathbf{R}^d$ 上のラプラス作用素のスペクトル

はじめにラプラス作用素のスペクトルを求めてみよう．

定理 12.11　$\sigma(-\widetilde{\Delta}) = [0, \infty)$ であり，$\sigma(-\widetilde{\Delta})$ は真性スペクトルのみからなる．

証明　もし，ある $\lambda \in \mathbf{C}$ とある $f \in D(-\widetilde{\Delta}) = W^2(\mathbf{R}^d)$, $\|f\|_2 > 0$ で，$-\widetilde{\Delta} f - \lambda f = 0$ なるものが存在したとする．この両辺をフーリエ変換すると $(|\xi|^2 - \lambda)\widehat{f}(\xi) = 0$ $(\xi \in \mathbf{R}^d)$ である．ゆえに，$\widehat{f}(\xi) = 0$ a.e. $\xi \in \mathbf{R}^d$．したがって固有値は存在しない．

$\lambda \in [0, \infty)$ を任意にとる．これが真性スペクトルになっていることを証明する．$\varepsilon_j > 0$, $\varepsilon_j \to 0$ $(j \to \infty)$ と $\{x^{(j)}\}_{j=1,2,\ldots} \subset \mathbf{R}^d$, $|x^{(j)}| \to \infty$ $(j \to \infty)$ なる列と，ある $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ (ただし $\psi \neq 0$) を適当に選んで，$\operatorname{supp} \psi(\varepsilon_j(x - x^{(j)}))$ $(j = 1, 2, \ldots)$ が互いに素になるようにしておく．$k \in \mathbf{R}^d$ で $|k|^2 = \lambda$ なるものを一つとり，

$$f_j(x) = \varepsilon_j^{d/2} \psi(\varepsilon_j(x - x^{(j)})) e^{ikx} \qquad (x \in \mathbf{R}^d;\ j = 1, 2, \ldots)$$

とおく．このとき，$\|f_j\|_2 = \|\psi\|_2$，かつ

$$\|f_j - f_\ell\|_2^2 = \|f_j\|_2^2 + \|f_\ell\|_2^2 = 2\|\psi\|_2^2 > 0 \qquad (j \neq \ell).$$

さらに，

$$-\widetilde{\Delta} f_j - \lambda f_j = \varepsilon_j^{d/2} e^{ikx} \left[\varepsilon_j^2 (-\Delta\psi)(\varepsilon_j(x - x^{(j)})) - 2i\varepsilon_j \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial \psi}{\partial x_\ell}(\varepsilon_j(x - x^{(j)}))k_\ell \right].$$

ゆえに

$$\| -\widetilde{\Delta} f_j - \lambda f_j \|_2 \leqq \varepsilon_j^2 \|\Delta\psi\|_2 + 2\sqrt{\lambda}\varepsilon_j \|\nabla\psi\|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

したがって，f_j は λ に対するワイル列になっている．

次に，$\lambda \in \mathbf{C}$ $(\lambda \notin [0,\infty))$ とする．このとき，

$$Tf = \mathcal{F}^{-1}[(|\xi|^2 - \lambda)^{-1}\mathcal{F}[f]] \quad (= (\widetilde{\Delta} - \lambda I)^{-1} f)$$

とおく．明らかに，$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^d} \left| |\xi|^2 - \lambda \right|^{-1} < \infty$ であるから，プランシュレルの定理より

$$\|Tf\|_2 \leqq \sup_{\xi \in \mathbf{R}^d} \left| |\xi|^2 - \lambda \right|^{-1} \|f\|_2 \qquad (f \in L^2(\mathbf{R}^d)).$$

これより，$\lambda \in \rho(-\widetilde{\Delta})$ がわかる．よって $\sigma(-\widetilde{\Delta}) = [0,\infty)$ である．　□

12.3.2 クーロンポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素のスペクトル

次に，シュレーディンガー作用素

$$H = -\alpha\widetilde{\Delta} + V, \qquad \alpha = \frac{\hbar^2}{2m}, \qquad V(x) = -\frac{K}{|x|}$$

$$(m > 0,\ K > 0) \tag{12.2}$$

のスペクトルについて学ぼう．この作用素は離散スペクトルと真性スペクトルの両方が現れる．

定理 12.12 H のスペクトルは

$$\sigma(H) = \{\lambda_N\}_{N=1}^{\infty} \cup [0,\infty), \qquad \lambda_N = -\frac{K^2 m}{2\hbar^2 N^2}$$

である．$[0,\infty)$ は真性スペクトルであり，λ_N $(N = 1, 2, \ldots)$ は離散スペクトルである．

以下，この定理の証明をする．はじめにいくつかの補題を示した後，H の真性スペクトルを求める．

補題 12.13 λ が H の真性スペクトルで，$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ を λ に関する H の正規直交ワイル列とする．このとき，任意の $R>0$ に対して

$$\lim_{j\to\infty}\|f_j|B_R\|_{W^1(B_R)}=0, \tag{12.3}$$

ただし $B_R=\{x\in\mathbf{R}^3:|x|<R\}$ である．

証明 (12.3) がある $R>0$ に対して成り立っていないとする．このとき，$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ とある $\delta>0$ が存在し，$\|f_{j'}|B_R\|_{W^1(B_R)}\geqq\delta$ である．したがって，定理 9.4，$p_m(f)$, $q_m(f)$ の同値性および補題 9.12 より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，j,ε によらない正定数 C_1 と，j に依存しないが ε には依存する定数 C_ε が存在し，次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\|f_{j'}\|_{2,2}&\leqq C_1(\alpha\|\widetilde{\Delta}f_{j'}\|_2+\|f_{j'}\|_2)\\&\leqq C_1(\|(H-\lambda)f_{j'}\|_2+\|Vf_{j'}\|_2+\|\lambda f_{j'}\|_2+\|f_{j'}\|_2)\\&\leqq C_1(\|(H-\lambda)f_{j'}\|_2+\varepsilon\|f_{j'}\|_{2,2}+(C_\varepsilon+|\lambda|+1)\|f_{j'}\|_2).\end{aligned}$$

ここで ε を $C_1\varepsilon=1/2$ となるようにとって，$C_1\varepsilon\|f_{j'}\|_{2,2}$ を左辺に移項すれば，

$$\|f_{j'}\|_{2,2}\leqq 2C_1\|(H-\lambda)f_{j'}\|_2+C_3\qquad(C_3 \text{ は } j \text{ に依存しない定数}).$$

ゆえに $\sup_{j'}\|f_{j'}\|_{2,2}<\infty$ である．したがって，$\sup_{j'}\|f_{j'}|B_R\|_{W^2(B_R)}<\infty$ であるから，レーリッヒの定理により $\{f_{j'}|B_R\}_{j'=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{f_{j''}|B_R\}_{j''=1}^{\infty}$ とある $f\in W^1(B_R)$ が存在し，

$$\|f-f_{j''}|B_R\|_{W^1(B_R)}\to 0\qquad(j''\to\infty)$$

となる．$\widetilde{f}=f\chi_{B_R}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_{B_R}|f|^2\,dx=\lim_{j''\to\infty}\int_{B_R}f\,\overline{f_{j''}}\,dx&=\lim_{j''\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}\widetilde{f}\,\overline{f_{j''}}\,dx\\&=\lim_{j''\to\infty}(\widetilde{f},f_{j''})_2.\end{aligned}$$

ここで，ベッセルの不等式より，

$$\sum_{j''=1}^{\infty}|(\widetilde{f},f_{j''})_2|^2\leqq\|\widetilde{f}\|_2^2<\infty$$

であるから，$\lim_{j''\to\infty}(\widetilde{f},f_{j''})_2=0$. ゆえに $f(x)=0$ a.e. $x\in B_R$ となる．したがって，$\|f_{j''}|B_R\|_{W^1(B_R)}\to 0$ $(j''\to\infty)$ である．これは $\{f_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ のとり方に反している．□

$R > 0$ に対して，ψ_R を $\psi_R \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ で

$$0 \leqq \psi_R(x) \leqq 1 \ (x \in \mathbf{R}^3); \qquad \psi_R(x) = 0 \ (x \in B_{R/2}); \qquad \psi_R(x) = 1 \ (x \notin B_R)$$

を満たすものとする．このとき次が成り立つ．

補題 12.14 λ が H の真性スペクトルに属し，$\{f_j\}_{j=1}^\infty$ を λ に関する H の正規直交ワイル列であるとする．このとき，$1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots$ を $\{f_{j_k}\psi_k\}_{k=1}^\infty$ が再び H のワイル列になるようにとることができる．

証明 以下 $f \in W^1(\mathbf{R}^3)$ に対して，$\nabla f = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \partial f/\partial x_3)$ を各 $\partial f/\partial x_j$ が L^2 導関数であるような勾配とする．

補題 12.13 より，任意の $R > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|(H-\lambda)(f_j\psi_R)\|_2 \\
&\quad = \|(-\alpha\widetilde{\Delta} f_j)\psi_R - 2\alpha\nabla f_j \cdot \nabla\psi_R - \alpha f_j(\Delta\psi_R) + V f_j\psi_R - \lambda f_j\psi_R\|_2 \\
&\quad \leqq \|\{(H-\lambda)f_j\}\psi_R\|_2 + \|2\alpha\nabla f_j \cdot \nabla\psi_R + f_j(\Delta\psi_R)\|_2 \\
&\quad \leqq \|(H-\lambda)f_j\|_2 + C\|f_j|B_R\|_{W^1(B_R)},
\end{aligned}$$

ただしここで C は f_j にはよらない定数とする．ゆえに，任意の $R > 0$ に対して

$$\|(H-\lambda)(f_j\psi_R)\|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

が成り立つ．そこで $1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots$ なる部分列を

$$\|f_{j_k}|B_k\|_{W^1(B_k)} \leqq \frac{1}{4}, \quad \|(H-\lambda)(f_{j_k}\psi_k)\|_2 \leqq \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{12.4}$$

となるようにとることができる．$\|f_{j_k}\psi_k\|_2 \leqq \|f_{j_k}\|_2 = 1$ であり，$j \neq \ell$ のとき

$$\begin{aligned}
\|f_{j_k}\psi_k - f_{j_\ell}\psi_\ell\|_2 &\geqq \|f_{j_k} - f_{j_\ell}\|_2 - \|f_{j_k}(1-\psi_{j_k})\|_2 - \|f_{j_\ell}(1-\psi_{j_\ell})\|_2 \\
&\geqq \sqrt{\|f_{j_k}\|_2^2 + \|f_{j_\ell}\|_2^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} > 0.
\end{aligned}$$

ゆえに $\{f_{j_k}\psi_k\}_{k=1}^\infty$ は H のワイル列になっている． □

以上の準備のもと，次の命題を証明する．

命題 12.15 $\lambda \in \mathbf{R}$ が H の真性スペクトルに属することと，$-\alpha\widetilde{\Delta}$ の真性スペクトルに属することとは同値である．ゆえに，H の真性スペクトルは $[0, \infty)$ である．

証明 λ が H の真性スペクトルに属するとする．$\{f_{j_k}\psi_k\}_{k=1}^\infty$ を補題 12.14 で定めたものとする．$g_k = f_{j_k}\psi_k$ とおく．このとき，

$$\|(-\alpha\widetilde{\Delta} - \lambda)g_k\|_2 \leqq \|(H-\lambda)g_k\|_2 + \|V g_k\|_2.$$

(12.4) より $\|(H-\lambda)g_k\|_2 \to 0\ (k\to\infty)$ であり，さらに

$$\left\|Vg_k\right\|_2^2 \leqq K\int_{\mathbf{R}^3\setminus B_{k/2}} \frac{1}{|x|^2}|g_k|^2dx \leqq \frac{4K}{k^2} \to 0 \qquad (k\to\infty).$$

ゆえに $\left\{g_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ は $-\alpha\widetilde{\Delta}$ の λ に関するワイル列になっている．

逆に，λ を $-\alpha\widetilde{\Delta}$ の真性スペクトルに属するとする．補題 12.13, 12.14 は H の代わりに $-\alpha\widetilde{\Delta}$ としても成り立つことが同様の証明により示すことができる．それを使って，本証明と同じ議論で，λ が H の真性スペクトルに属することが証明できる．また，明らかに λ が $-\widetilde{\Delta}$ の真性スペクトルに属することと，$\alpha\lambda$ が $-\alpha\widetilde{\Delta}$ の真性スペクトルに属することは同値であるから，求める結果が証明される． □

注意 真性スペクトルがある種の作用素の摂動によって変化しないことを保証する次の一般的な定理が知られている:

定理 12.16 (ワイルの定理) A をヒルベルト空間 X 上の自己共役作用素で，B を X 上の対称作用素とする．$D(A)\subset D(B)$ であり，作用素 $D(A)\ni u\mapsto Au\in X$ が A のグラフノルム $\|u\|+\|Au\|$ に関してコンパクト作用素になっているとする (コンパクト作用素とは，有界集合を相対コンパクト集合に写す作用素のことである)．このとき，$A+B$ は $D(A+B)=D(A)$ とする自己共役作用素であり，A および $A+B$ の真性スペクトルは一致する．

この定理を使って，命題 12.15 を証明することもできる ([DL, 第 3 巻] 参照).

次に，H の離散スペクトルの計算をする．

$\lambda\in\mathbf{R}$ が H の固有値とし，$f\in W^2(\mathbf{R}^3)$ を $Hf=\lambda f$ を満たし，$\|f\|_2=1$ なるものとする．このとき，次が成り立つ．

補題 12.17 (1) $f\in C_b(\mathbf{R}^3)$ であり，かつ $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\{0\})$ である．
(2) $\lambda<0$ である．

証明 (1) $2>3/2$ であるから，ソボレフの埋め込み定理より $W^2(\mathbf{R}^3)\subset C_b(\mathbf{R}^3)$ である．ゆえに $f\in C_b(\mathbf{R}^3)$．後半の主張を示すため，$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ であり，しかも 0 のある近傍で 0 になっているようなものを任意にとる．このとき，

$$\alpha\widetilde{\Delta}(\varphi f) = (\alpha\widetilde{\Delta}\varphi)f + \alpha\nabla\varphi\cdot\nabla f - \left(\frac{K}{|x|}+\lambda\right)\varphi f \tag{12.5}$$

である．φ は 0 の近傍で 0 であるから，明らかに (12.5) の右辺は $W^1(\mathbf{R}^3)$ に属することがわかる．したがって，定理 9.6 により $\varphi f\in W^3(\mathbf{R}^3)$ となる．これより (12.5) の右辺が $W^2(\mathbf{R}^3)$ に属することがわかる．ゆえに，再び定理 9.6 より $\varphi f\in W^4(\mathbf{R}^3)$ である．この議論を繰り返せば $\varphi f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ がわかり，結局 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3\setminus\{0\})$ となる．

(2) $s>0$, $x\in\mathbf{R}^3$ に対して $d_s(x)=sx$ とする．$\widetilde{\Delta}$ の定義に従って計算すると，

$$\widetilde{\Delta}(f\circ d_s)=s^2(\widetilde{\Delta}f)\circ d_s$$

がわかる．ゆえに

$$\begin{aligned}H(f\circ d_s)&=-\alpha\widetilde{\Delta}(f\circ d_s)-K|x|^{-1}f\circ d_s\\&=-\alpha s^2(\widetilde{\Delta}f)\circ d_s-K|x|^{-1}f\circ d_s\\&=s^2(\lambda f+K|x|^{-1}f)\circ d_s-K|x|^{-1}f\circ d_s\\&=s^2\lambda f\circ d_s+K|x|^{-1}(s-1)f\circ d_s.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\lambda(f\circ d_s,f)_2&=(f\circ d_s,Hf)_2\\&=(H(f\circ d_s),f)_2\\&=s^2\lambda(f\circ d_s,f)_2+(s-1)(f\circ d_s,K|\cdot|^{-1}f)_2.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lambda(s^2-1)(f\circ d_s,f)_2=-(s-1)(f\circ d_s,K|\cdot|^{-1}f)_2$$

である．$0<s<1$ のとき，これより

$$\lambda(s+1)(f\circ d_s,f)_2=-(f\circ d_s,K|\cdot|^{-1}f)_2$$

であるから，ここで $s\to 1$ とすれば

$$2\lambda=-(f,K|\cdot|^{-1}f)_2<0.$$ □

最後に，固有値を具体的に求めれば定理の証明が完了する．しかし，この部分は本質的には特殊関数の計算によるものであり，本書の主題からは多少離れるので，計算はここでは省き，補足の A.6 節にまわすことにする．

12.4 スペクトル分解と発展方程式

フーリエ解析発祥の地は熱伝導の問題であった．たとえば，長さ 2π の円状の断熱した棒 $\mathbf{T}=\{e^{i\theta}:\theta\in(-\pi,\pi]\}$ の時刻 $t=0$ における温度分布を $u(\theta)$ としたとき，時間とともにこの温度分布がどのように変化していくかは，次の偏微分方程式を解けばよかった:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\theta,t)=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\theta,t),\qquad u(\theta,0)=u(\theta),\quad u(-\pi)=u(\pi).$$

また，量子力学では，時間に依存したシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi, \qquad \psi(x,0) = f(x)$$

を解けば，状態 f の時間発展がわかるのであった．

これらの偏微分方程式を，ヒルベルト空間上の線形作用素に関する方程式に一般化する．以下では，$(X,(\ ,\ ))$ を $\mathbf{C}$ 上のヒルベルト空間とし，H を $D(H)$ を定義域とする X 上の自己共役作用素とする．まず熱方程式を抽象化しよう．

1) 抽象的熱方程式　　$u \in X$ が与えられたとき，

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t = -H(u_t) \qquad (t \in (0,\infty)),$$
$$\|u_t - u\| \to 0 \qquad (t \to 0) \tag{12.6}$$

を満たす $u_t \in D(H)$ を見いだせ．ただし，ここで

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u_{t+h} - u_t}{h} - v\right\| = 0$$

なる $v \in X$ が存在するとき，v を $(\partial/\partial t)u_t$ と表しているものとする．

また，次の方程式も考える．

2) 抽象的シュレーディンガー方程式　　$u \in D(H)$ が与えられたとき，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u_t = H(u_t) \qquad (t \in (0,\infty)),$$
$$\|u_t - u\| \to 0 \qquad (t \to 0) \tag{12.7}$$

を満たす $u_t \in D(H)$ を見いだせ．

このように偏微分方程式を抽象化する最大のメリットは，H としていろいろな偏微分作用素をとってくることができるという点である．たとえば，H としてコンパクト多様体上のラプラス・ベルトラミ作用素をもってくれば，方程式 (12.6) は多様体上の熱方程式を解いていることになり，H として各種のシュレーディンガー作用素をとってくることも可能なわけである．また，抽象的なシュレーディンガー方程式は，量子力学の数学的理論で重要な意味をもっている．

12.4.1　抽象的熱方程式

本節では，抽象的熱方程式の解の存在と一意性を示す．

定理 12.18 H をヒルベルト空間 X 上の半正定値な自己共役作用素とする．このとき，抽象的熱方程式 (12.6) は一意的な解をもつ．

証明 まず，H のスペクトル分解を使って解 u_t を構成する．$\{E(\mu)\}$ を H のスペクトル分解を与えるスペクトル族とする．このとき，$t > 0$ に対して，

$$P_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dE(\lambda)$$

により作用素 P_t を定義する．すると，任意の $u \in X$ に対して

$$\int_0^\infty |e^{-\lambda t}|^2\, d(E(\lambda)u, u) \leqq \|u\|^2 < \infty$$

より，P_t は $D(P_t) = X$ なる X 上の連続線形作用素であることがわかる．また，$u \in X$ に対して

$$E(\lambda)P_t(u) = E(\lambda)\left(\int_0^\infty e^{-\mu t}\, dE(\mu)u\right) = \int_0^\lambda e^{-\mu t}\, dE(\mu)u$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda^2\, d(E(\lambda)P_t u, P_t u) &= \int_0^\infty \lambda^2\, d\left(\int_0^\lambda e^{-2\mu t}\, d(E(\mu)u, u)\right)\\ &= \int_0^\infty \lambda^2 e^{-2\lambda t}\, d(E(\lambda)u, u)\\ &\leqq M\|u\|^2 < \infty,\end{aligned}$$

ただし，ここで M は t にのみ依存した正定数である．このことから，$R(P_t) \subset D(H)$ がわかる．さらに次が成り立つ:

$$\begin{aligned}HP_t u &= \int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)(P_t u)\\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, dE(\lambda)u.\end{aligned}$$

ところで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，λ に依存しないある $\delta > 0$ が存在し，$|s| < \delta$ ならば

$$\left|\frac{1}{s}\left(e^{-\lambda(t+s)} - e^{-\lambda t}\right) + \lambda e^{-\lambda t}\right| < \varepsilon$$

が成り立つ ($0 < \lambda$ に注意).

したがって，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{s}(P_{t+s}u - P_t u) + HP_t u\right\|^2 &= \int_0^\infty \left|\frac{1}{s}\left(e^{-\lambda(t+s)} - e^{-\lambda t}\right) + \lambda e^{-\lambda t}\right|^2 d(E(\lambda)u, u)\\ &\leqq \varepsilon^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

ゆえに $u_t = P_t u$ とおくと，$(\partial/\partial t)u_t = -H(u_t)$ $(t \in (0,\infty))$ が成り立っている．また，明らかに $\|u_t - u\| \to 0$ $(t \to 0)$ である．

次に，解の一意性を証明する．u_t, v_t を (12.6) の解であるとする．このとき，$w_t = u_t - v_t$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}w_t = -H(w_t) \quad (t \in (0,\infty))\,; \qquad \|w_t\| \to 0 \quad (t \to 0) \tag{12.8}$$

を満たす．$\|w_t\|^2$ を t に関して微分すると

$$\begin{aligned} s^{-1}\left(\|w_{t+s}\|^2 - \|w_t\|^2\right) &= s^{-1}\{(w_{t+s}, w_{t+s}) - (w_{t+s}, w_t) + (w_{t+s}, w_t) - (w_t, w_t)\} \\ &\to \left(w_t, \frac{\partial}{\partial t}w_t\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}w_t, w_t\right) \qquad (s \to 0) \\ &= -(w_t, H(w_t)) - (H(w_t), w_t) \\ &= -2\,\mathrm{Re}(H(w_t), w_t) \\ &\leqq 0. \end{aligned}$$

ゆえに $\|w_t\|^2$ は t に関し単調減少で，

$$\|w_t\| \leqq \|w_0\| = 0$$

を得る． □

12.4.2 抽象的シュレーディンガー方程式

ここでは抽象的シュレーディンガー方程式の解の存在と一意性を示す．

定理 12.19 H を X 上の自己共役作用素とする．$u \in D(H)$ が与えられたとき，抽象的シュレーディンガー方程式 (12.7) は一意的に解くことができる．

証明 まず，$\{E(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ を H のスペクトル分解を与えるスペクトル族とする．このとき，

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda/\hbar}\, dE(\lambda)$$

とおく．抽象的熱方程式の場合における証明と同様の考え方により，$u \in D(H)$ に対して $U_t u \in D(H)$ であり，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_t u = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-it\lambda/\hbar} dE(\lambda)u = H(U_t u),$$

かつ

$$\|U_t u - u\| \to 0 \qquad (t \to 0)$$

となっていることが証明できる．ゆえに $U_t u$ が求める抽象的シュレーディンガー方程式

の解になっていることがわかる.

次に，解の一意性を証明しよう．もし初期データ u が 0 であれば，$u_t = 0$ であることを証明すればよい．それは，次のようにしてわかる:

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\|u_{t+s}\|^2 - \|u_t\|^2\right)\\
&\quad = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left\{(u_{t+s}, u_{t+s}) - (u_{t+s}, u_t) + (u_{t+s}, u_t) - (u_t, u_t)\right\}\\
&\quad = \left(u_t, \frac{\partial}{\partial t}u_t\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}u_t, u_t\right)\\
&\quad = i\hbar^{-1}\left\{(u_t, Hu_t) - (u_t, Hu_t)\right\}\\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

よって $\|u_t\|$ は t に関して一定となり，$u_t = 0$ である. □

13 章

フレームの理論

いままで本書で学んできたフーリエ解析と関数解析の一つの基本原理は，ヒルベルト空間 $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ が正規直交基底 $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ をもつとき，任意の $f \in X$ が

$$f = \sum_n (f, \varphi_n)_X \varphi_n$$

のようにフーリエ展開できること，あるいはこの展開をより一般化したスペクトル分解ができることであった．しかし，正規直交基底でなくとも類似の展開ができることが知られている．それがこれから学ぶフレーム展開である．ただし，フレーム展開では，フレームとよばれている族 $\{\phi_n\} \subset X$ とその双対フレームとよばれている族 $\{\widetilde{\phi}_n\}$ によって

$$f = \sum_n (f, \widetilde{\phi}_n)_X \phi_n = \sum_n (f, \phi_n)_X \widetilde{\phi}_n$$

と展開されるのである．本章では，このフレーム展開の理論とその応用を紹介する．

13.1 フレーム

$(X, (\cdot,\cdot)_X)$ を $\mathbf{C}$ 係数のヒルベルト空間とし，$\|\cdot\|_X$ をそのノルムとする．$\Gamma = \mathbf{Z}^d$ とし，$N \in \mathbf{Z}_+$ に対して，

$$I(N) = \{n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{Z}^d : |n_j| \leqq N \ (j = 1, \dots, d)\}$$

とおく．X の元 ϕ と X の点列 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ に対して，$\sum_{n\in\Gamma} \phi_n = \phi$ とは，

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n\in I(N)} \phi_n - \phi \right\|_X = 0$$

を意味するものとする．また，数列 $\{a_n\}_{n\in\Gamma}$ に対しても $\sum_{n\in\Gamma} a_n = a$ は

$$\lim_{N\to\infty} \left| \sum_{n\in I(N)} a_n - a \right| = 0$$

を意味するものとする．

定義 13.1 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma} \subset X$ が X の**フレーム**であるとは，ある定数 $A > 0$, $B > 0$ が存在し，任意の $f \in X$ に対して

$$A\|f\|^2 \leqq \sum_{n\in\Gamma} |(f, \phi_n)|^2 \leqq B\|f\|^2 \tag{13.1}$$

を満たすことである．A, B を**フレーム定数**といい，特にフレーム定数を $A = B$ となるようにとることができるとき，フレームは**タイト**であるという．

さて，

$$\ell^2(\Gamma) = \left\{x = \{x_n\}_{n\in\Gamma} : x_n \in \mathbf{C}\ (n \in \Gamma),\ \sum_{n\in\Gamma} |x_n|^2 < \infty\right\}$$

とし，$x = \{x_n\}_{n\in\Gamma}$, $y = \{y_n\}_{n\in\Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$ に対して

$$(x, y)_{\ell^2} = \sum_{n\in\Gamma} x_n \bar{y}_n, \qquad \|x\|_{\ell^2} = \sqrt{(x, x)_{\ell^2}}$$

とする．$(\ell^2(\Gamma), (\cdot,\cdot)_{\ell^2})$ は $\mathbf{C}$ 係数のヒルベルト空間になっている．

いま，X のフレーム $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ が与えられているとする．このとき，$f \in X$ に対して，$Uf(n) = (f, \phi_n)_X$ とし，

$$Uf = \{Uf(n)\}_{n\in\Gamma}$$

とする．U は**ベッセル写像**とよばれている．

命題 13.1 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ がフレームのとき，次の (1), (2) が成り立つ．

(1) U は X から $\ell^2(\Gamma)$ への有界線形作用素で，単射である．

(2) U の値域 $R(U)$ は $\ell^2(\Gamma)$ の閉部分空間である．

証明 (1) U の有界性は (13.1) の右辺より明らかである．$Uf = 0$, すなわち $(f, \phi_n) = 0$ $(\forall n \in \Gamma)$ とすると，(13.1) の左辺より $f = 0$ が得られる．ゆえに U は単射である．

(2) $R(U) \ni Uf_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ をとる．もし，ある $x \in \ell^2(\Gamma)$ が存在して，$\|Uf_k - x\|_{\ell^2} \to 0$ $(k \to \infty)$ とする．

$$A\|f_k - f_{k'}\|_X \leqq \|Uf_k - Uf_{k'}\|_{\ell^2} \to 0 \qquad (k, k' \to \infty)$$

より，ある $f \in X$ が存在し，$\|f_k - f\|_X \to 0$ $(k \to \infty)$ である．ゆえに，

$$\|Uf_k - Uf\|_{\ell^2} \leqq B\|f_k - f\|_X \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

であるから，$x = Uf \in R(U)$ を得る． □

命題 13.1 より，U を X から $R(U)$ の上への作用素と考えると，U は全単射であるから，U の逆作用素

$$U^{-1} : R(U) \to X$$

が存在する．$R(U)$ は $\ell^2(\Gamma)$ の閉部分空間であるから，$\ell^2(\Gamma)$ から $R(U)$ への直交射影 P_U が存在する．そこで，

$$U^+ := U^{-1} \circ P_U$$

と定義すると，U^+ は $\ell^2(\Gamma)$ から X への線形作用素で，しかも，

$$U^+ x = U^{-1} x \qquad (x \in R(U))$$

が成り立っている．U^+ を U の**擬逆作用素**という．このとき，次がわかる．

命題 13.2 U^+ は $\ell^2(\Gamma)$ から X への有界線形作用素である．

証明 $x \in \ell^2(\Gamma)$ に対して，$x_1 = P_U x \in R(U)$ とおき，$f = U^{-1}x_1 \in X$ とおく．このとき，

$$\|U^+ x\|_X^2 = \|U^{-1}x_1\|_X^2 = \|f\|_X^2 \leqq \frac{1}{A}\sum |(f, \phi_n)|^2$$
$$= \frac{1}{A}\|Uf\|_{\ell^2}^2 = \frac{1}{A}\|x_1\|_{\ell^2}^2 \leqq \frac{1}{A}\|x\|_{\ell^2}^2. \qquad \square$$

一般に，U は逆作用素をもつとは限らない．しかし，以下に定義する U' を使って定義される $U' \circ U$ は逆作用素をもち，しかも U の擬逆作用素が

$$U^+ = (U' \circ U)^{-1} \circ U' \tag{13.2}$$

と表される．

U' は次のように定義される．$a \in \ell^2(\Gamma)$ に対して，

$$\varphi_a(f) = (Uf, a)_{\ell^2} \qquad (f \in X)$$

とおく．$|\varphi_a(f)| \leqq B^{1/2}\|f\|_X\|a\|_{\ell^2}$ より $\varphi_a \in X^*$ であるから，リースの定理 (定理 8.5) より，ある $h \in X$ で

$$\varphi_a(f) = (f, h)_X \quad (f \in X), \qquad \|\varphi_a\|_{X^*} = \|h\|_X$$

なるものが一意的に存在する．そこで $h = U'a$ とおく．明らかに U' は $\ell^2(\Gamma)$ から X への有界線形作用素であり，次を満たす:

$$(Uf, a)_{\ell^2} = (f, U'a)_X \qquad (f \in X,\ a \in \ell^2(\Gamma)).$$

次に (13.2) を証明する.

命題 13.3 (1) $U' \circ U$ は X 上の有界な自己共役作用素で全単射である.
(2) 関係式 (13.2) が成り立つ.

証明 (1) 任意の $g, f \in X$ に対して

$$(Ug, Uf)_{\ell^2} = (g, U' \circ Uf)_X$$

が成り立っている. また,

$$(Ug, Uf)_{\ell^2} = \overline{(Uf, Ug)_{\ell^2}} = \overline{(f, U' \circ Ug)_X} = (U' \circ Ug, f)_X$$

であるから, 明らかに, $U' \circ U$ は自己共役である.

次に $U' \circ U$ が単射であることを示す.

$$A\|f\|_X^2 \leqq (Uf, Uf)_{\ell^2} = (U' \circ Uf, f)_X \leqq \|U' \circ Uf\|_X \|f\|_X.$$

ゆえに $U' \circ Uf = 0$ とすると $f = 0$ である.

次に, 全射であることを示す. 上記の不等式より,

$$A\|f\|_X \leqq \|U' \circ Uf\|_X \tag{13.3}$$

が得られる. (13.3) より $R(U' \circ U)$ は閉部分空間である. 補題 8.23 を $A = U' \circ U$, $\mu = 0$ で適用すれば

$$X = \overline{R(U' \circ U)} \oplus N(U' \circ U) = R(U' \circ U).$$

(2) 最後に (13.2) を示す. そのためには,

$$(U' \circ U)U^+ x = U' x \qquad (\forall x \in \ell^2(\Gamma)) \tag{13.4}$$

を示せばよい.

$x \in R(U)^\perp$ とすると $U^+ x = 0$ であるから, $(U' \circ U)U^+ x = 0$. 一方, 任意の $f \in X$ に対して, $(f, U'x)_X = (Uf, x)_{\ell^2} = 0$ より, $U'x = 0$ で (13.4) が成立する. 次に, $x \in R(U)$ のときは, $U^+ x = U^{-1} x$ より $UU^+ x = x$ となり (13.4) が成立する. ▯

定理 13.4 $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ を X のフレームで, そのフレーム定数を A, B とし, $\widetilde{\phi}_n = (U' \circ U)^{-1} \phi_n$ とおく (これを ϕ の**双対フレーム**という). このとき, $\{\widetilde{\phi}_n\}_{n \in \Gamma}$ は X のフレームで, そのフレーム定数として $1/B$, $1/A$ をとることができる. しかも, 任意の $f \in X$ に対して,

$$f = \sum_{n \in \Gamma} (f, \phi_n)_X \widetilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} (f, \widetilde{\phi}_n)_X \phi_n$$

が成り立つ.

この定理の証明に必要な補題を示すことからはじめる.

補題 13.5 L を X 上の有界な自己共役作用素とする．ある定数 $A>0, B>0$ が存在し，任意の $f\in X$ に対して，

$$A\|f\|_X^2 \leqq (Lf,f)_X \leqq B\|f\|_X^2$$

が成り立つならば，L は逆作用素をもち，

$$\frac{1}{B}\|f\|_X^2 \leqq (L^{-1}f,f)_X \leqq \frac{1}{A}\|f\|_X^2$$

を満たす．

証明 仮定より，L は

$$Lf=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)f=\int_A^B\lambda\,dE(\lambda)f$$

とスペクトル分解できる．

$$Sf=\int_A^B\lambda^{-1}dE(\lambda)f$$

とおくと，定理 10.14 を用いて，次がわかる：

$$LSf=\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)f=f.$$

同様に $SLf=f$ も得られる．ゆえに $S=L^{-1}$ である．また，

$$(Sf,f)=\int_A^B\lambda^{-1}d(E(\lambda)f,f)\leqq\frac{1}{A}\int_A^B d(E(\lambda)f,f)=\frac{1}{A}\|f\|_X^2.$$

同様にして，$(Sf,f)\geqq B^{-1}\|f\|_X^2$ も得られる． □

定理 13.4 の証明 任意の $f\in X$ をとる．このとき，任意の $g\in X$ に対して，

$$(U'\circ Uf,g)_X=(Uf,Ug)_{\ell^2}=\sum_{n\in\Gamma}(f,\phi_n)_X\overline{(g,\phi_n)}_X=\left(\sum_{n\in\Gamma}(f,\phi_n)\phi_n,g\right)_X.$$

ゆえに，$U'\circ Uf=\sum_{n\in\Gamma}(f,\phi_n)_X\phi_n$ である．したがって，次が得られる：

$$\begin{aligned}f&=(U'\circ U)^{-1}\circ U'\circ Uf\\&=(U'\circ U)^{-1}\left(\sum_{n\in\Gamma}(f,\phi_n)_X\phi_n\right)=\sum_{n\in\Gamma}(f,\phi_n)_X\widetilde{\phi}_n.\end{aligned}$$

これより，任意の $g\in X$ に対して次のことも得られる：

$$\begin{aligned}(f,g)_X&=\left(f,\sum_{n\in\Gamma}(g,\phi_n)\widetilde{\phi}_n\right)_X\\&=\sum_{n\in\Gamma}(f,\widetilde{\phi}_n)_X\overline{(g,\phi_n)}_X=\sum_{n\in\Gamma}((f,\widetilde{\phi}_n)\phi_n,g)_X.\end{aligned}$$

ゆえに $f = \sum_{n\in\Gamma}(f, \widetilde{\phi}_n)\phi_n$ である．また，補題 13.5 より次がわかる:

$$\frac{1}{B}\|f\|_X^2 \leqq \sum |(f, \widetilde{\phi}_n)_X|^2 \leqq \frac{1}{A}\|f\|_X^2. \qquad \square$$

定理 13.6 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ をタイトフレームとし，そのフレーム定数を $A\,(= B)$ とする．このとき，

$$\widetilde{\phi}_n = \frac{1}{A}\phi_n$$

である．

証明
$$(U' \circ Uf, f)_X = \sum |(f, \phi_n)_X|^2 = A\|f\|_X^2$$
である．ゆえに任意の $f \in X$ に対して

$$((U' \circ U - AI)f, f)_X = 0 \tag{13.5}$$

が成り立つ．$L = U' \circ U - AI$ とおくと，L は自己共役作用であるから，(13.5) より，任意の $f, g \in X$ に対して，

$$0 = (L(f+g), (f+g))_X = 2\,\mathrm{Re}(Lf, g)_X.$$

一方，

$$\mathrm{Im}(Lf, g)_X = -\,\mathrm{Re}(L(if), g) = 0.$$

ゆえに $L = 0$ である．よって

$$\widetilde{\phi}_n = (U' \circ U)^{-1}\phi_n = \frac{1}{A}I\phi_n = \frac{1}{A}\phi_n. \qquad \square$$

ϕ_n が与えられたとき，$\widetilde{\phi}_n = (U' \circ U)^{-1}\phi_n$ を求めるためのアルゴリズムとして，次の "extrapolated Richardson procedure" が知られている．

命題 13.7 L を X 上の有界な自己共役作用素で，ある定数 $A > 0$, $B > 0$ が存在し，任意の $f \in X$ に対して，

$$A\|f\|_X^2 \leqq (Lf, f) \leqq B\|f\|_X^2$$

を満たしているとする．

$\gamma > 0$ を $\delta = \max\{|1 - A\gamma|, |1 - B\gamma|\} < 1$ なる数とする．このとき，$g \in X$ に対して

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \gamma g, \quad f_2 = f_1 + \gamma(g - Lf_1), \quad \ldots,$$

$$f_k = f_{k-1} + \gamma(g - Lf_{k-1}), \quad \ldots$$

とおくと，

$$\|L^{-1}g - f_k\|_X \leqq \delta^k \|f\|_X$$

である．ゆえに，$\lim_{k\to\infty} f_k = L^{-1}g$ となる．

証明 $f = L^{-1}g, T = I - \gamma L$ とおくと，

$$\begin{aligned} f - f_k &= f - f_{k-1} - \gamma L(f - f_{k-1}) \\ &= T(f - f_{k-1}) = \cdots = T^k(f - f_0) = T^k f \end{aligned}$$

である．さて

$$(Tf, f)_X = (f, f)_X - \gamma(Lf, f)_X \leqq (f, f)_X - \gamma A(f, f)_X \leqq \delta(f, f)_X,$$

同様に

$$(Tf, f)_X \geqq -\delta(f, f)_X.$$

ゆえに

$$|(Tf, f)_X| \leqq \delta \|f\|_X^2$$

である．この等式はすべての $g \in X$ (したがって，すべての $f \in X$) に対して成立するので，$\|T\| \leqq \delta$ が得られる．よって

$$\|f - f_k\|_X = \|T^k f\|_X \leqq \delta^k \|f\|_X$$

となる． □

13.2 並進フレームと一般化サンプリング定理

本節では，$\{\varphi(x - k)\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ のタイプのフレーム (**並進フレーム**) について述べ，次節では並進フレームを使ってサンプリング定理を一般化した形で再証明する．

はじめに，あとで必要になるので**多変数のディリクレ核**についてふれておこう．D_N を $[-\pi, \pi)$ におけるディリクレ核 (1.3 節参照) とする．$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ に対して

$$D_N^d(x) = D_N(x_1) \cdots D_N(x_d) \qquad \left(= \sum_{k\in I(N)} e^{ik\cdot x} \right)$$

とおく．また，$Q = [-\pi, \pi) \times \cdots \times [-\pi, \pi)$ (区間 $[-\pi, \pi)$ の d 直積) とし，

$$s_N[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_Q D_N^d(x - y) f(y)\, dy \qquad (x \in \mathbf{Q})$$

とおく．このとき，定理 6.5 および系 A.11 を用いて，

$$\lim_{N\to\infty}\int_Q |s_N(x)-f(x)|^2\,dx = 0 \qquad (f\in L^2(Q)) \tag{13.6}$$

を示すことができる．

さて，$\varphi\in L^2(\mathbf{R}^d)$ に対して，$\varphi\circ\tau_k(x)=\varphi(x-k)$ $(k\in\mathbf{Z}^d)$ で生成される $L^2(\mathbf{R}^d)$ の部分空間を $\mathcal{V}_\varphi$ とし，$\mathcal{V}_\varphi$ の $L^2(\mathbf{R})$ における閉包を V_φ とおく．このとき，V_φ は $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間である．次のことに注意しておく．

命題 13.8 ある定数 $A>0$, $B>0$ が存在し，すべての $f\in\mathcal{V}_\varphi$ に対して

$$A\|f\|_2^2 \leqq \sum_{k\in\mathbf{Z}^d}|(f,\varphi\circ\tau_k)_2|^2 \leqq B\|f\|_2^2 \tag{13.7}$$

が成り立つならば，$\{\varphi\circ\tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ は V_φ のフレームで，そのフレーム限界として A, B をとることができる．

証明 定義より，任意の $f\in V_\varphi$ に対してある $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{V}_\varphi$ が存在し，$\|f_n-f\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}|(f,\varphi\circ\tau_k)_2|^2 &= \sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\lim_{n\to\infty}|(f_n,\varphi\circ\tau_k)_2|^2\\ &\leqq \liminf_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}|(f_n,\varphi\circ\tau_k)_2|^2 \quad (\text{ファトウの補題; [伊藤] 参照})\\ &\leqq B\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

一方，三角不等式から

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}|(f,\varphi\circ\tau_k)_2|^2\Big)^{1/2}\\ &\qquad\geqq \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}|(f_n,\varphi\circ\tau_k)_2|^2\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}|(f-f_n,\varphi\circ\tau_k)_2|^2\Big)^{1/2}\\ &\qquad\geqq \sqrt{A}\,\|f_n\|_2 - \sqrt{B}\,\|f-f_n\|_2\\ &\qquad\to \sqrt{A}\,\|f\|_2 \qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

□

次に，$\{\varphi\circ\tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ が V_φ のフレームになっていることの判定法として有用なベネデット・リーの定理を述べる．

以下，$f\in L^2(\mathbf{R}^d)$ に対して

$$G_f(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d}|\widehat{f}(\xi+2\pi k)|^2 \tag{13.8}$$

とおく．このとき，

$$\int_Q G_f(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = (2\pi)^d \|f\|_2^2 < \infty$$

であるから，$G_f(\xi) < \infty$ a.e. $\xi \in \mathbf{R}^d$ である．そこで，

$$N_f = \{\xi \in \mathbf{R}^d \ : \ G_f(\xi) = 0\} \tag{13.9}$$

とおく．この N_f はルベーグ測度 0 の差を除いて一意的に決まる集合である．

定理 13.9 (ベネデット・リーの定理)　ある定数 $A > 0, B > 0$ が存在し，ほとんどすべての $\xi \in Q \setminus N_\varphi$ に対して $A \leqq G_\varphi(\xi) \leqq B$ が成り立っているとする．このとき，$\{\varphi \circ \tau_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ は V_φ のフレームになっている．

証明　任意の有限集合 $F \subset \mathbf{Z}^d$ と任意の $c_k \in \mathbf{C}$ $(k \in F)$ に対して，$\Theta(\xi) = \sum_{k \in F} c_k e^{-ik\cdot\xi}$ $(c_k \in \mathbf{C})$ とおく．このような関数を**三角多項式**という．仮定より明らかに，任意の三角多項式 Θ に対して

$$A\int_Q |\Theta(\xi)|^2 G_\varphi(\xi)\,d\xi \leqq \int_Q |\Theta(\xi)|^2 G_\varphi(\xi)^2\,d\xi \leqq B\int_Q |\Theta(\xi)|^2 G_\varphi(\xi)\,d\xi \tag{13.10}$$

である．

以下，次の二つの等式を証明する: $f = \sum_{k \in F} c_k \varphi \circ \tau_k$ とおくと

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^d \int_Q |\Theta(\xi)|^2 G_\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{13.11}$$

$$\lim_{K \to \infty} \sum_{k \in I(K)} |(f, \varphi \circ \tau_k)_2|^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_Q |\Theta(\xi)|^2 G_\varphi(\xi)^2\,d\xi. \tag{13.12}$$

もし (13.11), (13.12) が証明されたならば，(13.10) と命題 13.8 より求める結果が得られる．

はじめに (13.11) の証明をする．$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in F} c_k e^{-ik\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi) = \Theta(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ であることに注意する．これにより

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 = (2\pi)^d \|\widehat{f}\|_2^2 &= (2\pi)^d \int_{\mathbf{R}^d} |\Theta(\xi)|^2\,|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= (2\pi)^d \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_Q |\Theta(\xi)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2\,d\xi \\
&= (2\pi)^d \int_Q |\Theta(\xi)|^2 G_\varphi(\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

である.

次に (13.12) を示す. 任意の正の整数 K に対して

$$\sum_{k\in I(K)}|(f,\varphi\circ\tau_k)_2|^2=\sum_{k\in I(K)}\left|\sum_{l\in F}c_l(\varphi\circ\tau_l,\varphi\circ\tau_k)_2\right|^2$$
$$=\sum_{k\in I(K)}\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m(\varphi\circ\tau_l,\varphi\circ\tau_k)_2\overline{(\varphi\circ\tau_m,\varphi\circ\tau_k)_2}.$$

ここで, プランシュレルの公式より,

$$(\varphi\circ\tau_l,\varphi\circ\tau_k)_2=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}e^{i(k-l)\cdot\xi}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi$$

である. ゆえに

$$\sum_{k\in I(K)}\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m(\varphi\circ\tau_l,\varphi\circ\tau_k)_2\overline{(\varphi\circ\tau_m,\varphi\circ\tau_k)_2}$$
$$=\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m\sum_{k\in I(K)}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}e^{i(k-l)\cdot\xi}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi\cdot\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}e^{i(m-k)\cdot\eta}|\widehat{\varphi}(\eta)|^2\,d\eta$$
$$=\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2e^{-il\cdot\xi}$$
$$\times\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{n\in\mathbf{Z}^d}\int_Q D_K^d(\xi-\eta)e^{im\cdot\eta}|\widehat{\varphi}(\eta+2\pi n)|^2d\eta\right)d\xi$$
$$=\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2e^{-il\cdot\xi}\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{n\in\mathbf{Z}^d}\int_Q D_K^d(\xi-\eta)e^{im\cdot\eta}G_\varphi(\eta)\,d\eta\right).$$

ここで, $E_m(\xi)=e^{im\cdot\xi}$ $(n\in\mathbf{Z}^d,\ \xi\in\mathbf{R}^d)$ とおくと,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{n\in\mathbf{Z}^d}\int_Q D_K^d(\xi-\eta)e^{im\cdot\eta}G_\varphi(\eta)\,d\eta=s_K[E_mG_\varphi](\xi)$$

であるから, 結局,

$$\sum_{k\in I(K)}|(f,\varphi\circ\tau_k)_2|^2=\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2e^{-il\cdot\xi}s_K[E_mG_\varphi](\xi)$$
$$=\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m\frac{1}{(2\pi)^d}\int_Q G_\varphi(\xi)e^{-il\cdot\xi}s_K[E_mG_\varphi](\xi)\,d\xi.$$

ゆえに

$$\lim_{K\to\infty}\sum_{k\in I(K)}|(f,\varphi\circ\tau_k)_2|^2=\sum_{l,m\in F}c_l\bar{c}_m\frac{1}{(2\pi)^d}\int_Q G_\varphi(\xi)^2e^{-i(l-m)\cdot\xi}d\xi$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_Q G_\varphi^2|\Theta(\xi)|^2d\xi.$$

□

双対フレームを G_φ を使って求めるために，次の定理は有用である．

補題 13.10 $\psi \in L^2(\mathbf{R}^d)$ とし，$M_\psi = \mathbf{R}^d \setminus N_\psi$ とおく．もしある定数 $a>0$, $b>0$ が存在し，ほとんどすべての $\xi \in M_\psi$ に対して

$$a \leqq G_\psi(\xi) \leqq b$$

が成り立っているとする．このとき，定理 13.9 より $\{\psi \circ \tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ は V_ψ のフレームになっているが,

$$\widetilde{\psi} = \mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{M_\psi}\frac{1}{G_\psi}\widehat{\psi}\right]$$

とおくと，$\{\widetilde{\psi} \circ \tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ は $\{\psi \circ \tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ の双対フレームになっている．

証明 U を V_ψ から $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ へのベッセル写像とする．定理 13.4 より $\psi = U' \circ U\widetilde{\psi}$ を示せばよい．$\chi_{M_\psi}G_\psi^{-1}$ は各変数に対して周期 2π の関数であり，$L^2(Q)$ の元とみなせるので，これを Q 上で L^2 ノルムの意味でフーリエ級数展開

$$\chi_{M_\psi}G_\psi^{-1}(\xi) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k\in I(K)} c_k e^{-ik\cdot\xi}$$

する．このとき $\widetilde{\psi} = \lim_{K\to\infty}\sum_{k\in I(K)} c_k\psi\circ\tau_k$ が $L^2(\mathbf{R}^d)$ のノルムの意味で成り立っている．したがって $\widetilde{\psi} \in V_\psi$ である．さらに

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d(\widetilde{\psi}, \psi\circ\tau_k)_2 &= (\mathcal{F}[\widetilde{\psi}], \mathcal{F}[\psi\circ\tau_k])_2 \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\mathcal{F}[\widetilde{\psi}](\xi)e^{ik\cdot\xi}\overline{\mathcal{F}[\psi](\xi)}\,d\xi = \int_{M_\psi} G_\psi(\xi)^{-1}e^{ik\cdot\xi}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \sum_{j\in\mathbf{Z}^d}\int_{Q\cap M_\psi} G_\psi(\xi)^{-1}e^{ik\cdot\xi}|\widehat{\psi}(\xi+2\pi j)|^2\,d\xi = \int_{Q\cap M_\psi} e^{ik\cdot\xi}\,d\xi.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}(\widetilde{\psi}, \psi\circ\tau_k)_2 e^{ik\cdot\xi}\widehat{\psi}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{Q\cap M_\psi} e^{ik\cdot\eta}\,d\eta\cdot e^{ik\cdot\xi}\widehat{\psi}(\xi) \\
&= \overline{\chi_{M_\psi}(\xi)}\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

この等式の最初と最後の項をフーリエ逆変換すれば,

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}(\widetilde{\psi}, \psi\circ\tau_k)_2\psi\circ\tau_k = \psi$$

が得られる．定理 13.4 の証明より，この等式の左辺が $U'\circ U\widetilde{\psi}$ に等しいことがわかる．ゆえに補題 13.10 の証明が終わった． □

13.3 フレームとサンプリング定理

並進フレームからつくられる空間 V_φ と帯域制限関数との密接な関係を説明することからはじめたい．

$E \subset \mathbf{R}^d$ を有界なルベーグ可測集合とし，$\{E+2\pi k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ がルベーグ測度 0 の差を除いて $\mathbf{R}^d$ の**タイリング**を与えているとする．すなわち

$$\sum_{k\in\mathbf{R}^d} \chi_E(x+2\pi k) = 1 \quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^d \tag{13.13}$$

を満たしているとする．たとえば，$Q = [-\pi,\pi)\times\cdots\times[-\pi,\pi)$ (d 直積) は明らかに条件 (13.13) を満たしている．

さて，E を (13.13) を満たすルベーグ可測集合とする．このとき，V を E に帯域制限された L^2 関数全体のなす集合

$$BL(E) = \{f\in L^2(\mathbf{R}^d) : \mathrm{supp}(\widehat{f}\,)\subset E\}$$

とし，また

$$S(x) = \mathcal{F}^{-1}[\chi_E]$$

とおく．このとき，

$$G_S(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} |\widehat{S}(\xi+2\pi k)|^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} \chi_E(\xi+2\pi k) = 1 \quad \text{a.e. } \xi\in\mathbf{R}^d$$

が成り立つ．

定理 13.9 より $\{S\circ\tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ は V_S のフレームであり，しかも，次の考察から $L^2(\mathbf{R}^d)$ の正規直交系になっていることがわかる：任意の $k\in\mathbf{Z}^d$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d} S(x)\overline{S(x-k)}\,dx &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[S](\xi)\overline{\mathcal{F}[S(\cdot-k)](\xi)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}[S](\xi)\overline{\mathcal{F}[S](\xi)}e^{ik\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\int_{Q+2k\pi} |\mathcal{F}[S](\xi)|^2\,e^{ik\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_Q \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} |\chi_E(\xi+2k\pi)|^2\,e^{ik\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_Q \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} \chi_E(\xi+2k\pi)e^{ik\cdot\xi}\,d\xi.
\end{aligned}$$

ゆえに (13.13) より

$$\int_{\mathbf{R}^d} S(x)\overline{S(x-k)}\,dx = \begin{cases} 1 & (k=(0,\cdots,0)) \\ 0 & (k\neq(0,\cdots,0)) \end{cases}$$

が得られる.

V_S と帯域制限された関数とは密接な関係がある.

補題 13.11 $BL(E)\cap L^1(\mathbf{R}^d)\subset V_S.$

証明 任意の $\beta\in\mathbf{R}^d$ に対して $S\circ\tau_\beta\in V_S$ である. 実際,

$$F(\xi)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^d} e^{-i\beta\cdot(\xi-2k\pi)}\chi_{E+2k\pi}(\xi)$$

とおくと $F(\xi+2k\pi)=F(\xi)$ a.e. $\xi\in\mathbf{R}^d$ が成り立ち, しかも $F\in L^2(Q)$ である. さらに $e^{-i\beta\cdot\xi}\chi_E(\xi)=F(\xi)\chi_E(\xi)$. ゆえに $S\circ\tau_\beta\in V_S$ がわかる. このことから, $E_\beta(\xi)=e^{i\beta\cdot\xi}$ とおくと $\{E_\beta\chi_E\,:\,\beta\in\mathbf{R}^d\}\subset\mathcal{F}[V_S]$ である. したがって, $BL(E)\cap L^1(\mathbf{R}^d)\subset V_S$ がわかる. □

次の定理が成り立つ.

定理 13.12 $E\subset\mathbf{R}^d$ を有界なルベーグ可測集合で, $\{E+2\pi k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ がルベーグ測度 0 の差を除いて $\mathbf{R}^d$ のタイリングを与えているとする. $f\in V_S$ とし, $S=\mathcal{F}^{-1}[\chi_E]$ とおくと, $L^2(\mathbf{R}^d)$ 収束の意味で

$$f=\lim_{K\to\infty}\sum_{k\in I(K)} f(k)S\circ\tau_k \tag{13.14}$$

が成り立つ. さらに, (13.14) は絶対一様収束としても成り立つ.

この定理を示すため, いくつかの補題を証明する.

補題 13.13 (1) $S\in C(\mathbf{R}^d)$.

(2) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}^d}|S(x+n)|^2=1.$

(3) $G_S(\xi)=1$ a.e. $\xi\in\mathbf{R}^d$.

(4) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}^d}S(n)e^{in\cdot\xi}=1.$

証明 (1), (3) はすでに示してあるので, (2), (4) を証明する. $x\in\mathbf{R}^d$ に対して,

$$C_x(\xi)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^d} e^{ix\cdot(\xi+2k\pi)}\chi_E(\xi+2\pi k)$$

とおく. C_x は各変数に対して周期 2π の関数で, したがって $L^2(Q)$ の元とみなすこと

ができる．このことに注意すれば，次のことがわかる：$n \in \mathbf{Z}^d$ に対して

$$S(x+n) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_E e^{i(x+n)\cdot\xi}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_Q C_x(\xi)e^{in\cdot\xi}\,d\xi.$$

したがって，パーセヴァルの等式により

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}^d}|S(x+n)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^d}\|C_x\|_{L^2(Q)}^2 = 1$$

である．さらに $\delta_{n,0}$ をクロネッカーのデルタとして，

$$S(n) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_E e^{in\cdot\xi}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\int_{(E-2\pi k)\cap Q} e^{in\cdot\xi}\,d\xi$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_Q e^{in\cdot\xi}d\xi = \delta_{n,0}.$$

したがって，$\sum_{n\in\mathbf{Z}^d} S(n)e^{in\cdot\xi} = 1.$ □

定理 13.12 の証明　補題 13.13(3) と定理 13.9 より，$\{S\circ\tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ は V_S のフレームである．また補題 13.10 より，$\{S\circ\tau_k\}_{k\in\mathbf{Z}^d}$ はその双対フレームにもなっている．したがって，定理 13.4 より，

$$f(x) = \lim_{K\to\infty}\sum_{k\in I(K)}(f, S\circ\tau_k)_2 S\circ\tau_k \tag{13.15}$$

が $L^2(\mathbf{R}^d)$ 収束の意味で成り立っている．$\{(f, S\circ\tau_k)_2\}_{k\in\mathbf{Z}^d} \in \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ であるから，補題 13.13 (2) より (13.15) は絶対収束している．記号を簡略にするため $c_k = (f, S\circ\tau_k)_2$ とおき，

$$C(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} c_k e^{-ik\cdot\xi} \qquad (L^2(Q) \text{ ノルム収束})$$

とおく．ここで $\widehat{f} = C\widehat{S}$ である．ゆえに (13.15) は一様収束している．

$$c_k = (2\pi)^{-d}\sum_{l\in\mathbf{Z}^d} c_l\int_Q e^{-i(l-k)\cdot\xi}\,d\xi$$
$$= (2\pi)^{-d}\sum_{l\in\mathbf{Z}^d} c_l\int_Q\sum_{n\in\mathbf{Z}^d} S(n)e^{in\xi}e^{-i(l-k)\cdot\xi}\,d\xi$$
$$= \sum_{l\in\mathbf{Z}^d} c_l S(k-l) = f(k).$$

よって定理が証明された． □

注意　本節で述べた定理は，“X. Zhou and W. Sun, On the sampling theorem for wavelet subspaces, *J. Fourier Analysis and Applications, 5 (1999), 347–354*” によるものである．なお Zhou と Sun は 1 変数の場合を示していて，本書では d 変数の場合を述べているが，証明は本質的に彼らのものと同様である．

14 章

バナッハ空間上の線形作用素

これまでヒルベルト空間に関する関数解析について述べてきた．ヒルベルト空間上のノルムは，その内積から導かれるものであった．しかし必ずしも内積から導かれない空間を考える必要がある．たとえば $L^p(\mathbf{R}^d)$ は，$p \neq 2$ の場合は，内積から導かれるノルム空間にはなっていない (14,1 節の例参照)．本章では，内積が定義されているとは限らない空間としてノルム空間，バナッハ空間に関する基礎事項の一部を述べる．

14.1　ノルム空間とバナッハ空間

一般に次の条件を満たす量をノルムという．以下，X を $\mathbf{K}$ 上の線形空間とする．

定義 14.1 X 上で定義された関数 $\|\cdot\|$ で，次の (1)–(3) を満たすものを X 上の**ノルム**という:

(1) $u \in X$ に対して $\|u\| \geqq 0$．特に $\|u\| = 0$ ならば $u = 0$ である．

(2) $u \in X$ と $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$．

(3) $u, v \in X$ に対して $\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\|$．

X と X 上のノルム $\|\cdot\|$ との組 $(X, \|\cdot\|)$ を $\mathbf{K}$ 上の**ノルム空間**という．特に混乱のないときは単にノルム空間という．

(3) の不等式を**三角不等式**という．

もし X に内積 $(\cdot,\cdot)$ が定義されているとき，内積から導かれるノルムは明らかに X 上のノルムである．いかなる内積からも導かれないノルムもある．はじめに，ノルムが内積から導入されるノルムになるための必要十分条件を証明する．

定理 14.1 $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．次の (1), (2) は同値である．
(1) X 上にある内積 $(\cdot,\cdot)$ が存在し，$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ $(u \in X)$ を満たす．
(2) (**中線定理**) 任意の $u, v \in X$ に対して，

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)$$

が成り立つ．

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2) は補題 6.8 による．
(2) $\Longrightarrow$ (1) を示す．$\mathbf{K} = \mathbf{C}$ の場合を示す．$u, v \in X$ に対して，

$$(u,v) = \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{u+iv}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{u-iv}{2}\right\|^2$$

と定義する．このとき $(u,u) = \|u\|^2$ が成り立っている．$(\cdot,\cdot)$ が X 上の内積であることを証明すればよい．定義から

$$(u,v) = \overline{(v,u)}$$

が成り立っている．また，$(0,v) = 0$ である．$(\cdot, v)$ の線形性を示す．

$$\begin{aligned}4\left((u,v) + (w,v)\right) &= \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \|w+v\|^2 - \|w-v\|^2 \\ &\quad + i\left(\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2 + \|w+iv\|^2 - \|w-iv\|^2\right)\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}&\|u+v\|^2 + \|w+v\|^2 - \|u-v\|^2 - \|w-v\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+w+2v\|^2 + \|u-w\|^2 - \|u+w-2v\|^2 - \|u-w\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u+w+2v\|^2 - \|u+w-2v\|^2\right) \\ &= 2\left(\left\|\frac{u+w}{2}+v\right\|^2 - \left\|\frac{u+w}{2}-v\right\|^2\right).\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}&\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2 + \|w+iv\|^2 - \|w-iv\|^2 \\ &= 2\left(\left\|\frac{u+w}{2}+iv\right\|^2 - \left\|\frac{u+w}{2}-iv\right\|^2\right).\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}4\left((u,v) + (w,v)\right) &= 2\left(\left\|\frac{u+w}{2}+v\right\|^2 - \left\|\frac{u+w}{2}-v\right\|^2\right) \\ &\quad + 2\left(\left\|\frac{u+w}{2}+iv\right\|^2 - \left\|\frac{u+w}{2}-iv\right\|^2\right) \\ &= 8\left(\frac{u+w}{2}, v\right) = 4\,(u+w, v).\end{aligned}$$

次に，$(\alpha u, v) = \alpha (u, v)$ を示す．定義より $(0, v) = 0$ であるから，$0 = (-u + u, v) = (-u, v) + (u, v)$．ゆえに $(-u, v) = -(u, v)$ である．$(\cdot, v)$ の線形性から，正の整数 m に対して

$$m\left(\frac{1}{m}u, v\right) = \left(\frac{1}{m}u, v\right) \overset{m\ \text{個の和}}{+ \cdots +} \left(\frac{1}{m}u, v\right) = (u, v)$$

であるから，$(\frac{1}{m}u, v) = \frac{1}{m}(u, v)$．以上の結果から，任意の有理数 $\frac{n}{m}$ に対して，$(\frac{n}{m}u, v) = \frac{n}{m}(u, v)$ が得られる．定義より $\alpha \mapsto (\alpha u, v)$ は連続関数であるから，任意の実数 α に対して $(\alpha u, v) = \alpha (u, v)$ が成り立つ．定義から $(iu, v) = i (u, v)$ が成り立つので，任意の複素数 α に対して，$(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ が成り立つ． □

次にノルム空間の例をあげておく．$1 \leqq p < \infty$ に対して

$$L^p(S, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : \begin{array}{c} f \text{ は } S \text{ 上の } \mathcal{B} \text{ 可測関数で} \\ \|f\|_p = \left(\int_S |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty \end{array} \right\}$$

とおく．S 上の $\mathcal{B}$ 可測関数 f に対して

$$\|f\|_\infty = \inf \{ t > 0 : \mu(\{x \in S : |f(x)| > t\}) = 0 \}$$

(ただし $\inf \emptyset = \infty$) とし，

$$L^\infty(S, \mathcal{B}, \mu) = \{ f : f \text{ は } S \text{ 上の } \mathcal{B} \text{ 可測関数で } \|f\|_\infty < \infty \}$$

とおく．ただし以上において，$f, g \in L^p(S, \mathcal{B}, \mu)$ に対して，$f(x) = g(x)$ μ-a.e. $x \in S$ であるとき，$f = g$ とみなす．このとき，和とスカラー積を

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \qquad (x \in S)$$

$(f, g \in L^p(S, \mathcal{B}, \mu), \alpha, \beta \in \mathbf{C})$ と定義すると，ミンコフスキーの不等式 (補足 定理 A.1) から，$L^p(S, B, \mu)$ が $\mathbf{C}$ 上の線形空間になっていることがわかる．また，ミンコフスキーの不等式より $\|\cdot\|_p$ は $L^p(S, \mathcal{B}, \mu)$ 上のノルムになっている．

例題 $p \neq 2$ のとき，$L^p(\mathbf{R})$ 上のノルム $\|\cdot\|_p$ は内積から導かれるノルムではないことを示せ．

証明 $1 \leqq p < \infty$ の場合を示す．$u(x) = \chi_{[0,1/2)}(x)$ とし，$v(x) = \chi_{[1/2,1)}(x)$ とする．このとき

$$\|u + v\|_p^2 + \|u - v\|_p^2 = 2,$$

$$2\left(\|u\|_p^2 + \|v\|_p^2\right) = \frac{4}{2^{2/p}}.$$

したがってこれらが一致するのは $p=2$ の場合に限る.

$p=\infty$ の場合も容易にこれらが一致しないことがわかる. □

ノルム空間 $(X,\|\cdot\|)$ に対しても，ヒルベルト空間の場合の定義 (定義 6.9) において内積から導かれるノルムの代わりに X 上のノルム $\|\cdot\|$ を考えることにより，**開集合**，**閉包**，**閉集合**，**閉部分空間**，**稠密**が定義される.

定義 14.2 $(X,\|\cdot\|)$ を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間とする. $u_n \in X$ $(n=1,2,\cdots)$ が X の**コーシー列**であるとは

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

を満たすことである. X の任意のコーシー列 $u_n \in X$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して，必ずある $u \in X$ で,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$$

を満たすものが存在するとき X は**完備**であるという. 完備なノルム空間を $\mathbf{K}$ 上の**バナッハ空間**という. 特に混乱のないときは，単にバナッハ空間という.

明らかに，ヒルベルト空間はバナッハ空間である. また，定理 1.25 と同様の議論により，$1 \leqq p \leqq \infty$ に対して，$L^p(S,B,\mu)$ もバナッハ空間であることがわかる.

このほかのバナッハ空間の例としては，S を $\mathbf{R}^d$ の空でない有界閉集合であるとき，S 上の連続関数全体のなす空間 $C(S)$ が

$$\|f\|_S = \sup_{x\in S} |f(x)|$$

をノルムとするバナッハ空間になっている.

定理 14.2 $(C(S),\|\cdot\|_S)$ は $\mathbf{C}$ 上のバナッハ空間である.

証明 $|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)|+|g(x)|$ を用いて，$\|\cdot\|_S$ がノルムであることは容易に証明できる. ここでは完備性を示す. 関数列 $f_n \in C(S)$ が $\lim_{n,m\to\infty} \|f_m - f_n\|_S = 0$ を満たすとする. このとき，任意の $x \in S$ に対して数列 $\{f_n(x)\}$ はコーシー列であるから，収束列であり，その極限を $f(x)$ とおく. f により $x \in S$ に $f(x)$ を対応させる関数を表す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在し，$m,n > N$ ならば $\|f_m - f_n\|_S < \varepsilon$ であるから，$n > N$ のとき

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leqq \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

が成り立つ. このことは，f_n が f に S 上で一様収束することを意味している. した

がって，f は S 上の連続関数である．また，上記の不等式から，$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_S = 0$ も得られる． □

注意 この定理は一般に S がコンパクト・ハウスドルフ空間でも成立する．証明は上記のものと同様にしてできる．また，S 上の実数値連続関数全体からなる空間 $C_R(S)$ も同様のノルムで $\mathbf{R}$ 上のバナッハ空間になる．

14.2 バナッハ空間上の線形作用素とフーリエ解析への応用

連続線形作用素の概念は一般のノルム空間に一般化できる．

定義 14.3 $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とする．$D(T) \subset X$ を X の部分空間とする．$D(T)$ から Y への写像 T が線形あるいは線形作用素であるとは，$a_1, a_2 \in \mathbf{K}$, $x_1, x_2 \in D(T)$ に対して

$$T(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 T(x_1) + a_2 T(x_x)$$

が成り立つことである．特に $x_n, x \in D(T)$ が $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$ を満たすとき，$\lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - T(x)\|_Y = 0$ が成り立つとき，T は**連続**あるいは**連続線形作用素**という．

定理 8.2 の証明は，そのまま一般のノルム空間でも成り立ち，T が連続であることと，ある定数 $M > 0$ が存在して，すべての $u \in D(T)$ に対して

$$\|T(u)\|_Y \leqq M \|u\|_X$$

が成り立つことは同値であることが示せる．この不等式を満たすような線形作用素を**有界**あるいは**有界線形作用素**という．すなわち，有界であることと連続であることは同値である．連続あるいは有界な線形作用素 T に対して

$$\|T\| = \sup_{u \in D(T),\, \|u\|_X \leqq 1} \|T(u)\|_Y$$

とし，これを T の**作用素ノルム**という．連続線形作用素は有界線形作用素でもある．

本項では，有界線形作用素に関する重要な定理のひとつである一様有界性定理と，そのフーリエ解析への応用を述べる．$u \in X$ と $r > 0$ に対して

$$B_X(u, r) = \{v \in X : \|u - v\| < r\},$$

$$\overline{B_X(u,r)} = \{v \in X : \|u - v\| \leqq r\}$$

と表す．$B_X(u,r)$ を中心 u，半径 r の**開球**，$\overline{B_X(u,r)}$ を中心 u，半径 r の**閉球**という．同様にして $B_Y(w,r)$, $\overline{B_Y(w,r)}$ $(w \in Y, r > 0)$ も定義する．

まず，線形作用素の理論で基本となるベールのカテゴリー定理とよばれる定理を証明しておく．

定理 14.3 (ベールのカテゴリー定理) $(X, \|\cdot\|_X)$ をバナッハ空間とする．X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を閉集合で，$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ を満たすとする．このとき，ある X_n はある開球を含む．

証明 すべての X_n がいかなる開球も含まないとして矛盾を導く．この仮定のもとに，明らかに $X_1 \neq X$ である．$X \setminus X_1$ は空でない開集合であるから，ある $u_1 \in X \setminus X_1$ とある $0 < r_1 < 1/2$ で $B_X(u_1, r_1) \subset X \setminus X_1$ なるものが存在する．$(X \setminus X_2) \cap B_X(u_1, r_1/2) \neq \emptyset$ である．なぜならば，もしも $= \emptyset$ であれば，$B_X(u_1, r_1/2) \subset X_2$ となり仮定に反する．したがって，$B_X(u_2, r_2) \subset (X \setminus X_2) \cap B_X(u_1, r_1/2)$ を満たす $u_2 \in X$ と $0 < r_2 < 1/2^2$ が存在する．このとき $B_X(u_2, r_2) \cap X_2 = \emptyset$ である．以下，この操作を繰り返して，ある $u_n \in X$ とある $0 < r_n < 1/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が存在し，

$$B_X(u_{n+1}, r_{n+1}) \subset B_X(u_n, r_n/2), \qquad B(u_n, r_n) \cap X_n = \emptyset$$

となるものが存在することがわかる．したがって $\|u_{n+1} - u_n\|_X < r_n/2 < 1/2^{n+1}$ が成り立つ．これより，$n > m$ ならば

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_X &\leqq \|u_m - u_{m+1}\|_X + \cdots + \|u_{n-1} - u_n\|_X \\ &< \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m} \to 0 \qquad (m \to \infty). \end{aligned}$$

ゆえに X の完備性から，ある $u \in X$ で $\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_X = 0$ なるものが存在する．これより任意の r_m に対して，ある $n(m) > m$ が存在し，$\left\|u_{n(m)} - u\right\|_X < r_m/2$ なるものが存在する．したがって

$$\begin{aligned} \|u_m - u\|_X &\leqq \left\|u_m - u_{n(m)}\right\|_X + \left\|u_{n(m)} - u\right\|_X \\ &< \frac{r_m}{2} + \frac{r_m}{2} = r_m \end{aligned}$$

である．このことは $u \in B(u_m, r_m)$ であることを示している．したがって $u \notin X_m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ である．しかしこれは仮定 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ に反する． □

ベールのカテゴリー定理のひとつの応用として Banach と Steinhaus による一様有界性定理を証明する．

定理 14.4 (一様有界性定理) $(X, \|\cdot\|_X)$ をバナッハ空間とし，$(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とする．$\emptyset \neq \mathcal{T} \subset B(X, Y)$ とする．もしも任意の $u \in X$ に対して，

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T(u)\|_Y < \infty$$

であれば

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty$$

である．ただしここで $\|T\|$ は T の作用素ノルムである．

証明 自然数 n に対して

$$X_n = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} \{u \in X : \|T(u)\|_Y \leqq n\}$$

とする．このとき X_n は閉集合で，$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ を満たしている．ベールのカテゴリー定理より，ある X_N はある開球 $B_X(u_0, r)$ を含んでいる．したがって，任意の $u \in B_X(u_0, r)$ に対して $\|T(u)\|_Y \leqq N$ $(T \in \mathcal{T})$ である．いま，$v \in X$，$\|v\|_X = 1$ なる任意の v をとる．$w = \frac{r}{2}v + u_0$ とおくと，$w \in B_X(u_0, r)$ であるから，任意の $T \in \mathcal{T}$ に対して

$$N \geqq \|T(w)\|_Y \geqq \frac{r}{2}\|T(v)\|_Y - \|T(u_0)\|_Y$$

が成り立っている．ゆえに

$$\begin{aligned} \|T(v)\|_Y &\leqq \frac{2}{r}\left(N + \|T(u_0)\|_Y\right) \\ &\leqq \frac{2}{r}\left(N + \sup_{S \in \mathcal{T}} \|S(u_0)\|_Y\right) < \infty \end{aligned}$$

が得られる．ここで r, N は T に依存しない数であるから，これにより定理が証明された． □

一様有界性定理にはさまざまな応用があるが，ここではフーリエ級数論への応用を述べておく．周期をもつ連続関数のフーリエ級数は必ずしも各点で収束するとは限らない．このような例は du Bois-Reymond をはじめいくつかの具体例が知られている．一様有界性定理を使うと，ある点で発散するフーリエ級数をもつような連続関数が存在することを証明できることが知られている．ここではそれを述べる．まず，いくつかの記号を導入しておく．$C_{per}(-\pi, \pi)$ により，周期 2π の $\mathbf{R}$ 上の連続関数全体のなす集合とする．$C_{per}(-\pi, \pi)$ は $f, g \in C_{per}(-\pi, \pi)$ と $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ に対して通常の線形演算

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

により線形空間になる．さらに

$$\|f\| = \sup_{x\in[-\pi,\pi)} |f(x)|$$

によりバナッハ空間になることがわかる．その証明は $C(S)$ の完備性と同様の議論で行える．

一様有界性定理の系として次のことが成り立つ．

系 14.5 周期 2π の連続関数 f で，そのフーリエ部分和

$$s_N[f](x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$$

が，

$$\limsup_{N\to\infty} |s_N[f](0)| = \infty$$

を満たすものが存在する．

証明 T_N により，$f \in C_{per}(-\pi,\pi)$ に $s_N[f](0) \in C_{per}(-\pi,\pi)$ を対応させる写像を表す．明らかに s_N は $C_{per}(-\pi,\pi)$ から $\mathbf{C}$ への線形作用素になっている．$D_N(x)$ をディリクレ核とすると

$$T_N(f) = s_N[f](0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)f(-y)\,dy$$

であるが，D_N の定義から明らかに $|D_N(x)| \leqq 2N+1$ であり，

$$|T_N(f)| \leqq (2N+1)\,\|f\|.$$

すなわち

$$T_N \in B(C_{per}(-\pi,\pi),\mathbf{C})$$

である．

いま，$f(-y)$ を $D_N(y) \geqq 0$ ならば 1，$D_N(y) < 0$ ならば -1 なる関数とすると，f は周期 2π の有界な可測関数になっている．したがって，たとえば，定理 3.18 および補題 4.10，そして系 1.29 の証明から，周期 2π の 連続関数 f_k で，

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_k(y)|\,dy = 0, \qquad \|f_k\| \leqq 1$$

なるものが存在することが示せる．

$$T_N(f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)f(-y)\,dy \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\,dy$$

であるから，T_N の作用素ノルムは

$$\|T_N\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\,dy$$

を満たしている．次に，このディリクレ核の積分を評価する:

$$\int_0^{\pi} |D_N(t)|\, dt = \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} \right| dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\frac{1}{2}t} \right| \left(\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t} \right) dt.$$

ここで，$0 < t \leqq \pi$ の範囲で

$$\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t} \geqq 1$$

であるから，$s = (N+1/2)t$ と変数変換して次の式を得る:

$$\pi \|T_N\| \geqq \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t} \right| dt = \int_0^{(N+1/2)\pi} \left| \frac{\sin s}{s} \right| ds$$

$$\geqq \int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin s}{s} \right| ds = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin s}{s} \right| ds$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin s}{s} \right| ds = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(s+n\pi)}{s+n\pi} \right| ds$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s+n\pi}\, ds$$

$$\geqq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin s\, ds = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

$$\to \infty \qquad (n \to \infty).$$

ゆえに一様有界性定理から，ある $f \in C_{per}(-\pi, \pi)$ が存在し，

$$\sup_N |T_N(f)| = \infty$$

でなければならない．よって以上のことから系が証明される． □

A

補　　足

A.1　測度空間上のヘルダーの不等式，ミンコフスキーの不等式

本書でよく使う不等式をあげておこう．一般的な設定のもとで述べるが，$\mathbf{R}^d$ 上のルベーグ測度などの場合をイメージしてもらえば十分である．

S を集合，$\mathcal{B}$ を完全加法族，μ を S 上の $\mathcal{B}$–測度とする ([伊藤] 参照)．$\mathcal{B}$–可測関数 f に対して

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_S |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & (1 \leqq p < \infty) \\ \inf\{t > 0 : \mu(\{x \in S : |f(x)| > t\}) = 0\} & (p = \infty) \end{cases}$$

とおく．そして $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して

$$L^p(S) = \{f \ : \ f \text{ は } \mathcal{B}\text{–可測で } \|f\|_p < \infty\}$$

とする．

定理 A.1　(1) (**ミンコフスキーの不等式**)　$1 \leqq p \leqq \infty$ とする．$f, g \in L^p(S)$ に対して $f + g \in L^p(S)$ であり，

$$\|f + g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$$

が成り立つ．

(2) (**ヘルダーの不等式**)　$1 \leqq p \leqq \infty$ とし，$(1/p) + (1/q) = 1$ とする．$f \in L^p(S)$，$g \in L^q(S)$ とすると，$fg(x) = f(x)g(x)$ により定義される関数 fg は $L^1(S)$ の元で

$$\|fg\|_1 \leqq \|f\|_p \|g\|_q \tag{A.1}$$

を満たしている．特に $p = 2$ の場合，(A.1) を**シュヴァルツの不等式**という．

これらの等式の証明は，たとえば [伊藤, pp.165–166] にある．

A.2 単調増加関数とヘリーの選出定理の証明

$f(x)$ を $[a,b]$ で定義された関数とする．f が $[a,b]$ で単調増加とは，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ なる任意の x_1, x_2 に対して $f(x_1) \leqq f(x_2)$ となることである．単調増加関数に対しては，いつでも

$$f(x \pm 0) = \lim_{h>0,\, h\to 0} f(x \pm h) \qquad (\text{複号同順})$$

が存在し (なぜならば，単調増加な実数列は必ず極限をもつ)，$f(x-0) \leqq f(x) \leqq f(x+0)$ である．ここで，$f(x+0) = f(x-0)$ のとき x を f の**連続点**といい，$f(x+0) > f(x-0)$ のとき x を f の**不連続点**という．

定理 A.2 単調増加関数 f の不連続点は高々可算個しかない．

証明 x_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を f の互いに異なる不連続点とすると，y 軸上の開区間 $I_\lambda = (f(x-0), f(x+0)) \neq \emptyset$ が得られる．$I_\lambda \cap I_\mu = \emptyset$ $(\lambda \neq \mu)$ であるから，各 I_λ の中から有理数 a_λ をとれば，$\lambda \neq \mu$ のとき $a_\lambda \neq a_\mu$ である．ところで，このような有理数は高々可算個しかない． □

ヘリーの選出定理 (定理 11.6) の証明 $[a,b]$ 内の有理数全体と b からなる数列を $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ とおく．$|f_n(x_1)| \leqq M$ $(n = 1,2,\dots)$ であるから，ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より，ある部分列 $\{n(1,j)\}_{j=1}^{\infty} \subset \{n\}$ を選んで，$\lim_{j\to\infty} f_{n(1,j)}(x_1)$ が存在するようにできる．また，$\sup_j |f_{n(1,j)}(x_2)| < \infty$ であるから，適当に部分列 $\{n(2,j)\} \subset \{n(1,j)\}$ を選んで $\lim_{j\to\infty} f_{n(2,j)}(x_2)$ が存在するようにできる．以下，この操作を繰り返して，$\{n(k,j)\}_{j=1}^{\infty}$ $(k = 1,2,\dots)$ をとることができる．そこで，$n_k = n(k,k)$ とする．すると，明らかにすべての x_j に対して $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_j)$ が存在する．f_{n_k} をあらためて f_k とおくことにする．そして，

$$h(x_j) = \lim_{k\to\infty} f_k(x_j) \qquad (j = 1,2,\dots)$$

とおく．各 f_k が単調増加であるから，$x_i < x_j$ ならば $h(x_i) \leqq h(x_j)$ となることは容易にわかる．そして，$x \in [a,b)$ とするときは，

$$g(x) = \inf_{x<x_i} h(x_i)$$

と定義し，$g(b) = h(b)$ と定義する．すると，g は $[a,b]$ 上の関数になっている．これが求める関数であることを証明しよう．

定義から $g(x)$ が単調増加関数であることは明らかである．$x \in [a,b)$ のときは，inf の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g(x_j) - \varepsilon < g(x)$ なる $x_j > x$ が存在する．$x < x + \delta < x_j$ なる δ に対しては $g(x+\delta) \leqq g(x_j)$ であるから，$g(x+\delta) - \varepsilon \leqq g(x)$

となる．ゆえに，g は x で右連続である．

ところで，定理 A.2 より，g の不連続点は高々可算個しかない．そこで不連続点全体を $\{\xi_j\}_{j=1,2,\dots}^{\infty}$ とおく．

次に，g の連続点 $x_0 \in (a,b)$ に対しては，

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = g(x_0)$$

となることを示そう．x_0 は g の連続点であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，

$$|x - x_0| < \delta \implies g(x_0) - \varepsilon \leqq g(x) \leqq g(x_0) + \varepsilon$$

となる．いま，

$$x_0 - \delta < x_{i'} < x_i < x_0 < x_j < x_{j'} < x_0 + \delta$$

なる有理数 $x_{i'}, x_i, x_j, x_{j'}$ をとると，

$$g(x_0) - \varepsilon \leqq g(x_{i'}) \leqq g(x_i) \leqq g(x_j) \leqq g(x_{j'}) \leqq g(x_0) + \varepsilon$$

である．また，$f_n(x_i) \leqq f_n(x_0) \leqq f_n(x_j)$ であるから，$n \to \infty$ とすれば，

$$g(x_{i'}) \leqq h(x_i) \leqq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_0) \leqq \limsup_{n\to\infty} f_n(x_0) \leqq h(x_j) \leqq g(x_{j'})$$

である．ここで $\liminf_{n\to\infty}$ は下極限，$\limsup_{n\to\infty}$ は上極限である．ゆえに，

$$g(x_0) - \varepsilon \leqq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_0) \leqq \limsup_{n\to\infty} f_n(x_0) \leqq g(x_0) + \varepsilon.$$

ここで ε は任意の正数であったから，

$$g(x_0) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x_0) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x_0) \quad (= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0))$$

である． □

A.3 L^p 関数のフーリエ変換

次のことを証明する．

定理 A.3 $1 \leqq p \leqq \infty$ とし，$f \in L^p(\mathbf{R}^d)$，あるいは f は緩増加関数とする．もし $\mathcal{F}[F_f] = 0$ であるとすると，$f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ である．

いくつかの補題を準備しておく．

補題 A.4 $E \subset \mathbf{R}^d$ をルベーグ可測集合とする．E 上のルベーグ可測関数 f が $f(x) = 0$ a.e. $x \in E$ を満たすための必要十分条件は

$$\int_E |f(x)|\, dx = 0 \tag{A.2}$$

なることである．

証明は [伊藤] をみよ．これを使って次のことを証明する．

補題 A.5 (1) $f, g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ が $F_f = F_g$ を満たすならば，$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ である．

(2) $f, g \in L^p(\mathbf{R}^d)$ $(1 < p \leqq \infty)$，あるいは f, g は緩増加関数とする．$F_f = F_g$ ならば，$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ である．

証明 (1) $w = f - g$ とおく．$F_w = 0$ である．

$$E_n = \{x \in \mathbf{R}^d \ : \ |x| < n, \ 0 < |w(x)| < n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

とおき，

$$w_n(x) = (\overline{w(x)}/|w(x)|)\chi_{E_n}(x)$$

とする．定理 3.18 および補題 4.10 の証明を用いて，$\varphi_{n,k} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ で

$$\lim_{k\to\infty} \|w_n - \varphi_{n,k}\|_1 = 0,$$

$$|\varphi_{n,k}(x)| \leqq \|w_n\|_\infty \leqq 1 \qquad (x \in \mathbf{R}^d)$$

を満たすものが存在することが示せる．

したがって，ある部分列 $\{\varphi_{n,k(l)}\} \subset \{\varphi_{n,k}\}$ で $\lim_{l\to\infty} \varphi_{n,k(l)}(x) = w_n(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ を満たすようなものをとることができる (系 1.26 参照)．ゆえに，

$$\lim_{l\to\infty} w(x)\varphi_{n,k(l)}(x) = w(x)w_n(x) \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^d$$

であり，かつ

$$|w(x)\varphi_{n,k(l)}(x)| \leqq |w(x)| \in L^1(\mathbf{R}^d)$$

である．ルベーグの収束定理から $\|ww_n - w\varphi_{n,k(l)}\|_1 \to 0$ $(l \to \infty)$ がわかる．ところが

$$\int_{\mathbf{R}^d} w(x)\varphi_{n,k(l)}(x)\,dx = \langle F_w, \varphi_{n,k(l)}\rangle = 0$$

であるから，

$$\int_{\mathbf{R}^d} w(x)w_n(x)\,dx = \lim_{l\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} w(x)\varphi_{n,k(l)}(x)\,dx = 0.$$

ゆえに，$E = \{x \in \mathbf{R}^d : |w(x)| > 0\}$ とすると

$$\int_{\mathbf{R}^d} |w(x)|\,dx = \int_E |w(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} w(x)w_n(x)\,dx = 0.$$

ゆえに，補題 A.4 より $w(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ が得られる．

(2) $w = f - g$ とし，$B_N = \{x \in \mathbf{R}^d : |x| < R\}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ とする．また，$\psi_N \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ を $\psi_N(x) = 1$ $(x \in B_R)$ を満たすものとする．このとき，任意の

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\psi_N \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ であるから

$$\int_{\mathbf{R}^d} w(x)\psi_N(x)\varphi(x)\,dx = \langle w, \psi_N\varphi\rangle = 0$$

である．$w\psi_N$ はコンパクトな台をもつから $w\psi_N \in L^1(\mathbf{R}^d)$ である．実際 $f, g \in L^p(\mathbf{R}^d)$ $(1 < p \leqq \infty)$ ならば，ヘルダーの不等式より

$$\|w\psi_N\|_1 \leqq \|w\|_p \|\psi_N\|_q < \infty \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

w が緩増加連続の場合，$|w|$ の $\mathrm{supp}(\psi_N)$ における最大値を M とすると，$\|w\psi_N\|_1 \leqq M\|\psi_N\|_1 < \infty$ である．ゆえに (1) より $w(x)\psi_N(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$．したがって，$w(x) = 0$ a.e. $x \in B_N$ $(N = 1, 2, \dots)$ である．よって (2) が証明された． □

定理 A.3 の証明 定理 4.3 より，フーリエ逆変換を考えれば $F_f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[F_f] = 0$ である．したがって，補題 A.5 より $f(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbf{R}^d$ である． □

定理 A.3 のフーリエ級数版として，次の定理が得られる．

定理 A.6 $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ とする．もし $c_k(f) = c_k(g)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ならば，$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in [-\pi, \pi]$ である．

証明 $H = f - g$ とおき，$H = 0$ a.e. を証明すればよい．そのために，$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ とし，$h(e^{it}) = H(t)$ $(t \in (-\pi, \pi])$ とおく．$E \subset \mathbf{T}$ に対して，$\widetilde{E} = \{t \in (-\pi, \pi] : e^{it} \in E\}$ とおく．E が可測であることを $\widetilde{E}$ がルベーグ可測であることと定義し，$\nu(E) = m(\widetilde{E})$ により定義する．ただし，m は $(-\pi, \pi]$ 上のルベーグ測度である．明らかに，ν は $\mathbf{T}$ 上の測度になっており，$h \in L^1(\mathbf{T}, \nu)$ である．以下，$H = 0$ a.e. でないと仮定して矛盾を導く．この仮定のもとで $h = 0$ a.e. でないから，ある正数 δ で $\nu(\{z \in \mathbf{T} : |h(z)| > \delta\}) > 0$ なるものが存在する (そうでないなら $|h| = 0$ a.e. となってしまう)．以下，h が実数値の場合を考える．

$$\{z \in \mathbf{T} : |h(z)| > \delta\} = \{z \in \mathbf{T} : h(z) > \delta\} \cup \{z \in \mathbf{T} : h(z) < -\delta\} \quad (= E_1 \cup E_2)$$

であるから，$\nu(E_1) > 0$ または $\nu(E_2) > 0$ である．$\nu(E_1) > 0$ としてもよい．なぜならば，そうでなければ h の代わりに $-h$ を考えればよい．

さて，ここで次節で解説するストーン・ワイエルシュトラスの定理を使う．$\mathbf{T}$ 上の関数 z^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ の $\mathbf{C}$ 係数の一次結合全体を $\mathcal{A}$ で表すと，$\mathcal{A}$ が $\mathbf{T}$ の点を分離する $C(\mathbf{T})$ の部分環で 1 を含むことが容易に示すことができる．また，$\mathbf{T}$ 上では $\overline{z^n} = z^{-n}$ であるから，$f \in \mathcal{A}$ ならば $\bar{f} \in \mathcal{A}$ である．したがって，次節で証明するストーン・ワイエルシュトラスの定理 (複素形) により，任意の $\varphi \in C(\mathbf{T})$ に対して，$\varphi_n \in \mathcal{A}$ が存在し，

$$\|\varphi_k - \varphi\|_\infty := \sup_{z \in \mathbf{T}} |\varphi_k(z) - \varphi(z)| \to 0 \qquad (k \to \infty) \tag{A.3}$$

である．ところで，仮定より，すべての整数 n に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} h(z)z^n\,d\nu(z) = c_k(f) - c_k(g) = 0$$

であるから，任意の $\psi \in \mathcal{A}$ に対して

$$\int_{\mathbf{T}} h(z)\psi(z)\,d\nu(z) = 0$$

である．ゆえに定理 A.10 より，任意の $\varphi \in C(\mathbf{T})$ に対して

$$\int_{\mathbf{T}} h(z)\varphi(z)\,d\nu(z) = 0 \tag{A.4}$$

が成り立つ．

ν の正則性より，任意の自然数 k に対して $K_k \subset E_1 \subset U_k$ かつ $\nu(U_k \setminus K_k) < 1/k$ なるコンパクト集合 K_k と開集合 U_k がとれる ([伊藤, 定理 7.5] 参照)．ウリゾーンの補題から，$w_k \in C(\mathbf{T})$ で

$$w_k(z) = 0\ (z \in \mathbf{T} \setminus U_k);\quad w_k(z) = 1\ (z \in K_k);\quad 0 \leqq w_k(z) \leqq 1\ (z \in \mathbf{T})$$

なるものが存在する．したがって，(A.4) より，任意の k に対して

$$\begin{aligned}
0 < \delta\nu(E_1) &\leqq \int_{E_1} h(z)\,d\nu(z) \\
&= \int_{E_1} h(z)\,d\nu(z) - \int_{\mathbf{T}} h(z)w_k(z)\,d\nu(z) \\
&= \int_{E_1\setminus K_k} (1 - w_k(z))h(z)\,d\nu(z) + \int_{U_k\setminus E_1} h(z)w_k(z)\,d\nu(z) \\
&\leqq \int_{E_1\setminus K_k} |h(z)|\,d\nu(z) + \int_{U_k\setminus E_1} |h(z)|\,d\nu(z) \\
&= \int_{U_k\setminus K_k} |h(z)|\,d\nu(z).
\end{aligned}$$

一方，任意の正数 ε に対して，ある k が存在し

$$\int_{U_k\setminus K_k} |h(z)|\,d\nu(z) < \varepsilon$$

となる．そこで，ε を $0 < \varepsilon < \delta\nu(E_1)/2$ とすれば，矛盾がおこる．　□

A.4 ストーン・ワイエルシュトラスの定理

Σ を $\mathbf{R}^d$ 内の二点以上を含むコンパクト集合とし，$C(\Sigma)$ により，Σ 上の複素数値連続関数全体のなす集合，$C_R(\Sigma)$ により Σ 上の実数値連続関数全体のなす集合を表すことにする．$f \in C(\Sigma)$ に対して

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Sigma} |f(x)|$$

と表すことにする．$(C(\Sigma), \|\cdot\|_\infty)$ はバナッハ空間になる (6.6 節参照).

定理 A.7 (ワイエルシュトラスの多項式近似定理) Σ が有限区間 $[a,b]$ であるとする．このとき，$f \in C_R([a,b])$ に対して，ある実係数多項式の列 $\{p_n\}$ で $\|p_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ なるものが存在する．

この定理の証明は，たとえば [伊藤, p.176] をみよ．

系 A.8 $\Sigma = [-a,a]$ とし，$h(x) = |x|$ とする．このとき，ある実係数の多項式 p_n で，$p_n(0) = 0$ かつ $\|p_n - h\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する．

証明 h に定理 A.7 を適用して得られる多項式列を $\{q_n\}$ とおく．$p_n(x) = q_n(x) - q_n(0)$ が求める多項式列である． □

定義 A.1 $C(\Sigma) \supset A$ が **Σ の点を分離する $C(\Sigma)$ の部分環**であるとは，次の (i), (ii), (iii) を満たすことである:

(i) $f, g \in A$ ならば $f+g$, fg, $\alpha f \in A$ $(\alpha \in \mathbf{C})$ となる．

(ii) $1 \in A$.

(iii) 任意の $x, y \in \Sigma$ $(x \neq y)$ に対してある $f \in A$ が存在して，$f(x) \neq f(y)$ となる．

また，$A \subset C_R(\Sigma)$ が Σ の点を分離する部分環であるとは，上記の (i) の条件の $\alpha \in \mathbf{C}$ を $\alpha \in \mathbf{R}$ に置き換えたものとする．

このような点を分離する部分環 A に対して

$$[A] = \left\{ f \in C(\Sigma) : \begin{array}{l} \text{ある } f_j \in A \ (j = 1, 2, \ldots) \text{ が存在し,} \\ \|f - f_j\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty). \end{array} \right\}$$

とおく．$A \subset C_R(\Sigma)$ のときには，

$$[A]_R = \left\{ f \in C_R(\Sigma) : \begin{array}{l} \text{ある } f_j \in A \ (j = 1, 2, \ldots) \text{ が存在し,} \\ \|f - f_j\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty). \end{array} \right\}$$

とする．

次の二つの定理を証明する．

定理 A.9 (ストーン・ワイエルシュトラスの定理 (実数形)) A を Σ の点を分離する $C_R(\Sigma)$ の部分環とする．このとき，$C_R(\Sigma) = [A]_R$ である．

定理 A.10 (ストーン・ワイエルシュトラスの定理 (複素形)) A を Σ の点を分離する $C(\Sigma)$ の部分環とし，さらに，

(iv) $f \in A$ ならば $\overline{f} \in A$,

を満たすとする．このとき，$[A] = C(\Sigma)$ である．

定理 A.9 の証明 いくつかのステップに分けて証明する．

ステップ 1. $x_1, x_2 \in \Sigma$ $(x_1 \neq x_2)$ とし，$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ とする．このとき，$f(x_1) = c_1$, $f(x_2) = c_2$ を満たす $f \in A$ が存在する．

証明 条件 (iii) より，$g(x_1) \neq g(x_2)$ なる $g \in A$ が存在する．そこで

$$f(x) = \frac{c_1}{g(x_1) - g(x_2)}(g(x) - g(x_2)) + \frac{c_2}{g(x_2) - g(x_1)}(g(x) - g(x_1))$$

とおけばこれが求める関数である．

ステップ 2. $f \in [A]_R$ ならば $|f| \in [A]_R$ である．

証明 $a = \|f\|_\infty$ とおく．$a > 0$ の場合を示せば十分である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，系 A.8 より，ある $c_0, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ が存在し，

$$\left| \sum_{j=0}^{n} c_j t^j - |t| \right| < \varepsilon \qquad (t \in [-a, a]) \tag{A.5}$$

となる．ここで $g = \sum_{j=0}^{n} c_j f^j$ とおくと $g \in [A]_R$ であり，任意の $x \in \Sigma$ に対して，(A.5) より

$$\Big| g(x) - |f(x)| \Big| = \left| \sum_{j=0}^{n} c_j f(x)^j - |f(x)| \right| < \varepsilon$$

である．一方，g 自身は A の元で近似できているから，結局 $|f| \in [A]_R$ が得られる．

ステップ 3. $f_1, \ldots, f_k \in [A]_R$ とする．このとき，

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\},$$
$$f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_k(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$$

とすると，$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$, $f_1 \vee \cdots \vee f_k \in [A]_R$ である．

証明 $f \wedge g = ((f+g) - |f-g|)/2$ であるから $f \wedge g \in [A]_R$ である．また，$f \vee g = ((f+g) + |f-g|)/2$ であるので $f \vee g \in [A]_R$ でもある．

$$f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 = (f_1 \wedge f_2) \wedge f_3$$

であるから，いまの議論より，これも $[A]_R$ の元である．これを繰り返していけば，

ステップ 3 が証明できる.

ステップ 4. $f \in C_R(\Sigma), x \in \Sigma, \varepsilon > 0$ を与えておく. このとき, ある $g_x \in [A]_R$ が存在し,

$$g_x(x) = f(x), \quad g_x(y) > f(y) - \varepsilon \qquad (y \in \Sigma)$$

となる.

証明 $y \in \Sigma$ とする. ステップ 1 より, ある $h_y \in A$ が存在し, $h_y(x) = f(x)$, $h_y(y) = f(y)$ となる. h_y は連続関数であるから, y のある開近傍 U_y が存在し, $h_y(z) > f(z) - \varepsilon$ $(z \in U_y)$ を満たす. $\bigcup_y U_y = \Sigma$ で Σ はコンパクトであるから, ある $y_1, \ldots, y_k \in \Sigma$ がとれて, $\bigcup_{j=1}^{k} U_{y_j} = \Sigma$ とできる.

$$g_x = h_{y_1} \vee \cdots \vee h_{y_k} \in [A]_R$$

とおくと, g_x が求める関数である.

ステップ 5. $C_R(\Sigma) = [A]_R$.

証明 任意の $f \in C_R(\Sigma)$ をとり, 任意の $\varepsilon > 0$ を与える. このとき,

$$\|f - h\|_\infty < 2\varepsilon$$

を満たす $h \in A$ の存在を示せばよい.

各 $x \in \Sigma$ に対して, ステップ 4 の $g_x \in [A]_R$ をとる. $g_x(x) = f(x)$ であるから, $x \in V_x \subset \Sigma$ なる開集合 V_x が存在し,

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in V_x).$$

Σ のコンパクト性から, ある $x_1, \ldots, x_m \in \Sigma$ が存在し,

$$\Sigma = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}.$$

そこで

$$\widetilde{h} = g_{x_1} \wedge \cdots \wedge g_{x_m} \in [A]_R$$

とする. このとき,

$$f(t) - \varepsilon < \widetilde{h}(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in \Sigma)$$

を満たす. $[A]_R$ の定義から, ある $h \in A$ が存在し,

$$f(t) - 2\varepsilon < h(t) < f(t) + 2\varepsilon$$

が存在する (なぜならば, $\|\widetilde{h} - h\|_\infty < \varepsilon$ なる $h \in A$ をとればよい). □

定理 A.10 の証明 $A_R = \{f \in A \ : \ f$ は実数値$\}$ とおく. $f \in A$ ならば $\mathrm{Re}\, f = (1/2)(f + \bar{f})$, $\mathrm{Im}\, f = (1/2i)(f - \bar{f})$ であるから, $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f \in A_R$ である. このこと

から，$A_R \subset C_R(\Sigma)$ が点を分離する Σ 上の代数であることが容易に確かめることができる．ゆえに

$$[A_R]_R = C_R(\Sigma)$$

である．したがって，

$$C(\Sigma) = C_R(\Sigma) + iC_R(\Sigma) = [A_R]_R + i[A_R]_R = [A]. \qquad \square$$

注意　ストーン・ワイエルシュストラスの定理は，Σ を抽象的なコンパクトハウスドルフ空間にしても成立している．証明は上のものと同じである．

応用例　Σ を $\mathbf{R}^d$ の 2 点以上を含むコンパクト集合とする．$\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ を $\mathbf{R}^d$ 上の複素係数の多項式全体のなす集合とし，

$$\mathcal{P}(\Sigma) = \{f|\Sigma \;:\; f \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)\}$$

とおく．ここで $f|\Sigma$ は f を Σ から $\mathbf{C}$ への関数として考えたものである．このとき，明らかに $\mathcal{P}(\Sigma)$ は定理 A.10 の仮定を満たしている．したがって，次が成り立つ．

系 A.11　任意の $f \in C(\Sigma)$ に対して，ある $p_n \in \mathcal{P}(\Sigma)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Sigma} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

を満たすものが存在する．

A.5 球面調和関数展開の項別微分

記号を簡略化するため，本節では $S = S^{d-1}$ とおく．S の次のような局所座標近傍系 $(U'_j, \varphi_j)_{j=1,2,\ldots,N}$ をとる．$\{U'_j\}$ は S のある開被覆で，φ_j は $\overline{U'_j}$ のある開近傍 U_j から $\mathbf{R}^{d-1}$ のある開集合 $\widetilde{U_j}$ の上への同相写像であり，$\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ は $\varphi_k(U_j \cap U_k)$ から $\varphi_j(U_j \cap U_k)$ の上への C^∞ 微分同形である．S 上の関数が S 上の C^∞ 級関数であるとは，$f \circ \varphi_j^{-1}$ が $\widetilde{U_j}$ 上の C^∞ 級関数になっていることである．この定義は，局所座標近傍系のとり方によらないことはすぐに示すことができる．S 上の C^∞ 級の関数全体のなす集合を $C^\infty(S)$ で表す．

さて，ψ_j を $\{U'_j\}$ に適合した 1 の分割とする．すなわち，$\psi_j \in C^\infty(S)$ で，

$$\mathrm{supp}(\psi) \subset U'_j, \quad 0 < \psi_j \leqq 1, \quad \sum_j \psi(x) = 1 \quad (x \in S)$$

なる関数族である．ここで $V_j = \varphi_j(U'_j)$ とおき，さらに，

$$W^m(S) = \{f \in L^2(S,\sigma) \;:\; (\psi f) \circ \varphi_j^{-1} \in W^m(V_j),\ j = 1, \ldots, N\},$$

そして，

$$\|f\|_{W(S)} = \sum_j \|(\psi f)\circ\varphi^{-1}\|_{W^m(V_j)}$$

とおく．この定義は局所座標近傍系のとり方に依存するが，集合としての $W^m(S)$ およびノルムの同値性は，局所座標系のとり方によらない．

$W^m(S)$ に対しても，ソボレフ空間に関する種々の定理が成り立つ．たとえば，$m > (d-1)/2$ ならば $W^m(S) \subset C(S)$ である，というソボレフの埋め込み定理も証明できる (各自試みよ．各座標近傍でソボレフの埋め込み定理を使えばよい)．

以下，$Y_j^{(\ell)}$ を Y_j^ℓ と表す．次が成り立つ．

定理 A.12 $f \in C^\infty$ とする．このとき，

(1) $$|(f, Y_j^\ell)| \leqq C_k(1+\ell^2)^{-k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

ただし C_k は f と d, k にのみ依存する正定数である．

(2) m を $m > (d-1)/2$ なる最小の整数とする．このとき，

$$\sup_{x'\in S} |Y_j^\ell(x')| \leqq C(\ell(d+\ell-2))^m.$$

ただし C は j, ℓ には依存しない定数である．

証明 (1) $(\cdot,\cdot)$ を $L^2(S,\sigma)$ の内積とする．計算により，任意の $f, g \in C^\infty(S)$ に対して $(\Delta_S f, g) = (f, \Delta_S g)$ が証明できる．ゆえに

$$\begin{aligned}-\ell(d+\ell-2)(f, Y_j^\ell) &= (f, \Delta_S Y_j^\ell)\\ &= (\Delta_S f, Y_j^\ell)\end{aligned}$$

である．同様にして

$$(-\ell(d+\ell-2))^k (f, Y_j^\ell) = (\Delta_S^k f, Y_j^\ell)$$

となる．ゆえに $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ と表すと

$$|(f, Y_j^\ell)| \leqq (\ell(d+\ell-2))^{-k} \|\Delta_S^k f\|\,\|Y_j^\ell\|$$

であり，$\|Y_j^\ell\| = 1$ であるから，求める結果が得られる．

(2) まず次の不等式が成り立つことを指摘しておく:

$$\|f\|_{W^m(S)} \leqq C(\|\Delta_S^m f\|_{L^2(S)} + \|f\|_{L^2(S)}) \qquad (f \in W^{2m}(S)). \tag{A.6}$$

ただし，$\|\cdot\|_{L^2(S)}$ は $L^2(S,\sigma)$ のノルムであり，C は f には依存しない定数である．この不等式は，次の理由から成り立つ．各座標近傍 V_j 上で Δ_S は

$$\sum_{j,k=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

と局所座標表示され，$a_{jk} = a_{kj}$，かつある $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0$ が存在し，すべての $x \in V_j$

とすべての $\xi \in \mathbf{R}^{d-1}$ に対して

$$\Lambda_1|\xi|^2 \leqq \sum_{j,k=1}^{d-1} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \leqq \Lambda_2|\xi|^2$$

を満たしている．すなわち，Δ_S は各 V_j 上の 2 階一様楕円型偏微分作用素になっている．したがって，楕円型偏微分作用素の一般論から，(A.6) が $f \in W_0^{2m}(U_j)$ に対して成り立っていることがわかる．$f \in W^{2m}(S)$ に対しては $f = \sum_j \psi_j f$ で，$\psi_j f \in W_0^{2m}(U_j)$ であるから，結局 (A.6) が成り立っている．そして $m > (d-1)/2$ の場合は，ソボレフの埋め込み定理から

$$\begin{aligned}\sup_{x' \in S} |Y_j^\ell(x')| &\leqq C_1 \|Y_j^\ell\|_{W^m} \\ &\leqq C_2(\|\Delta_S^m Y_j^\ell\|_{L^2(S)} + 1) \\ &= C_2((\ell(d+\ell-2))^m + 1).\end{aligned}$$

ここで，C_1, C_2 は ℓ, j に依存しない定数である．これより求める不等式が得られる．□

この定理を使えば，次のことが容易に証明できる．

定理 A.13 (1) $f \in C^\infty(S)$ であれば，

$$f(x') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2\ell+1} (f, Y_j^\ell) Y_j^\ell(x')$$

は S で一様絶対収束している．

(2) $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ とする．このとき，

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} f(r, x') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2\ell+1} \frac{\partial^k}{\partial r^k}(f(r,\cdot), Y_j^\ell) Y_j^\ell(x')$$

は任意の有界閉区間 $I \subset (0, \infty)$ と S との直積 $I \times S$ 上で一様絶対収束している．

証明 (1) は，定理 A.12 (1), (2) とワイエルシュトラスの M–判定法から明らかである．

(2) $f(r, x')$ およびそのすべての偏導関数は $I \times S$ 上で一様連続である．したがって，$I \times S$ 上で

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial^k r}(f(r,\cdot), Y_j^\ell)\right| = \left|\left(\frac{\partial^k}{\partial^k r} f(r,\cdot), Y_j^\ell\right)\right| \leqq C_n(1+\ell^2)^{-n}$$

が成り立つ．ただし C_n は j, ℓ には依存しない定数である．ゆえに再び M–判定法により定理が証明できる．□

A.6　定理 12.12 の証明の続き

固有値 λ を求めるためさらに計算を続けるが，ここでは計算のアウトラインを述べるにとどめることにする．$x \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ を $x = rx'$ $(r > 0,\ x' \in S^2)$ と極座標で表す．Δ_S を (7.13) で定めた球面 S^{d-1} 上のラプラス作用素の $d = 3$ の場合のものとする．また，(7.14) より

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S$$

である．以下，$Y_j^{(\ell)}$ を Y_j^ℓ と表す．

$f(x) = f(r, x')$ と表す．$f(r, \cdot)$ は S^2 上の C^∞ 関数であるから，球面調和関数展開できて

$$f(r, x') = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2\ell+1}(f(r,\cdot), Y_j^\ell)Y_j^\ell(x'),$$

ただしここで，$(\cdot,\cdot)$ は $L^2(S^2, \sigma)$ の内積である．

記号の簡略化のため，$F_j^\ell(r) = (f(r,\cdot), Y_j^\ell)$ とおく．$F_j^\ell(r)$ を r の関数とみれば明らかに $F_j^\ell \in C^\infty(0, \infty)$ である．

次に，$\Delta_S f(r, \cdot)$ を球面調和関数展開すると，

$$\begin{aligned}
\Delta_S f(r, x') &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2\ell+1}(\Delta_S f(r,\cdot), Y_j^\ell)Y_j^\ell(x') \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2\ell+1}(f(r,\cdot), \Delta_S Y_j^\ell)Y_j^\ell(x') \\
&= -\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2\ell+1}\ell(\ell+1)F_j^\ell(r)Y_j^\ell(x')
\end{aligned}$$

である．ここで定理 A.13 により，次のような項別微分ができる:

$$\begin{aligned}
0 &= -\alpha\widetilde{\Delta} f(r, x') - \frac{K}{r}f(r, x') - \lambda f(r, x') \\
&= -\alpha\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2\ell+1}\left\{\frac{d^2F_j^{(\ell)}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF_j^{(\ell)}}{dr} + \frac{1}{\alpha}\left(\lambda + \frac{K}{r} - \frac{\ell(\ell+1)\alpha}{r^2}\right)F_j^{(\ell)}\right\}Y_j^\ell.
\end{aligned}$$

したがって，$F_j^{(\ell)}$ は $(0, \infty)$ で次の常微分方程式を満たしていなければならない:

$$\frac{d^2F_j^{(\ell)}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF_j^{(\ell)}}{dr} + \frac{1}{\alpha}\left(\lambda + \frac{K}{r} - \frac{\ell(\ell+1)\alpha}{r^2}\right)F_j^{(\ell)} = 0. \tag{A.7}$$

ここで $\rho = \varphi(r) = \dfrac{\sqrt{8m|\lambda|}\,r}{\hbar}$ なる変数変換をすると，ρ の関数 $F_j^{(\ell)}(\varphi^{-1}(\rho))$ は次の微分方程式を満たしていることになる:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}F(\rho) + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}F(\rho) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|\lambda|}}\frac{1}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right)F(\rho) = 0.$$

さらに，$\beta = (K/\hbar)\sqrt{m/(2|\lambda|)}$ とおくと，この微分方程式は次のようになる:

$$\frac{d^2F}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dF}{d\rho} + \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right)F = 0. \tag{A.8}$$

いま，$F(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2}L(\rho)$ として $L(\rho)$ を定めれば，(A.8) は

$$\rho\frac{d^2L}{d\rho^2} + (2\ell+2-\rho)\frac{dL}{d\rho} + (\beta-1-\ell)L = 0 \tag{A.9}$$

と変形される．じつは，(A.9) は**合流型超幾何微分方程式**とよばれる常微分方程式のひとつである．結局，問題はこの合流型超幾何微分方程式を解くことに帰着された[1)]．合流型超幾何微分方程式の一般論で，(A.9) の一般解は次の二つの基本解の一次結合で表されることが知られている ([西本, p.133] 参照):

$$L_1(\rho) = F(\ell+1-\beta, 2\ell+2, \rho),$$
$$L_2(\rho) = F(\ell+1-\beta, 2\ell+2, \rho)\log\rho + F_1(\ell+1-\beta, 2\ell+2, \rho).$$

ただしここで，F は合流型超幾何関数 ([犬井], [西本]) であり，$F_1(\ell+1-\beta, 2\ell+2, \rho)$ は $\rho^{-2\ell-1}$ の項からはじまる ρ のベキ級数である．われわれの設定では，$f \in W^2(\mathbf{R}^3) \subset C_b(\mathbf{R}^3)$ であるから，$\lim_{r\to 0}|F_j^{(\ell)}(r)| < \infty$ でなければならない．この理由から $L_2(\rho)$ はわれわれの問題にとっては適切なものではない．つまり，$F_j^{(\ell)}(\varphi^{-1}(\rho))$ の候補としては，$\rho^\ell e^{-\rho/2}L_1(\rho)$ の定数倍があてはまる．

ところで，合流型超幾何関数は

$$F(a,b,\rho) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^\rho \rho^{a-b} \qquad (\rho \to +\infty)$$

なる漸近挙動をする ([犬井], [西本])．一方，$f \in L^2(\mathbf{R}^3)$ より，

$$\int_0^\infty r^2|F_j^{(\ell)}(r)|^2\,dr < \infty$$

である．したがって $\rho^\ell e^{-\rho/2}L_1(\rho)$ が求める解になっているためには，

$$\int_0^\infty \rho^2(\rho^\ell e^{-\rho/2}L_1(\rho))^2\,d\rho < \infty$$

でなければならない．このためには，$\ell+1-\beta \in \{0,-1,-2,\dots\}$ を満たしている必要がある．つまり，以上の考察をまとめると，λ が H の固有値であるならば，

$$\lambda_N = -\frac{K^2m}{2\hbar^2N^2} \qquad (N = 1,2,\dots)$$

のいずれかでなければならないことがわかる．

次に，実際各 λ_N が H の固有値になっていることを示す．まず $\ell+1-\beta = -n \in$

[1)] 合流型超幾何微分方程式については，[犬井]，[西本] に詳しい解説があるのでそれを参照してもらいたい．

$\{0,-1,-2,\dots\}$ のとき，方程式 (A.9) は

$$\rho\frac{d^2L}{d\rho^2}+(2\ell+2-\rho)\frac{dL}{d\rho}+nL=0 \tag{A.10}$$

であるが，われわれの条件に合うこの方程式の基本解は $F(-n,2\ell+2,\rho)$ であった．さらに，自然数 n と非負整数 ℓ を $N=\ell+1+n$ となるようにとっておく．この場合，$F(\ell+1-N,2\ell+2,\rho)$ はラゲールの陪関数と次の関係にあることが知られている ([犬井], [西本]: 本書でのラゲール陪多項式の定義と文献のそれとの差に注意せよ:

$$F(\ell+1-N,2\ell+2,\rho)=\frac{\Gamma(2\ell+2)(N-\ell-1)!}{\Gamma(\ell+N+1)}L^{2\ell+1}_{N-\ell-1}(\rho)$$

$$(N=1,2,\dots;\ \ell=0,\dots,N-1).\ )$$

したがって，λ_N は H の固有値であり，その固有関数は，

$$f_{N,\ell,j}(r,x')=\rho^\ell e^{-\rho/2}L^{2\ell+1}_{N-\ell-1}(\rho)Y^\ell_j(x'),\quad \rho=\frac{2Km}{\hbar^2N}r$$

$$(\ell=0,1,\dots,N-1;\ j=1,\dots,2\ell+1)$$

であることがわかる． □

参考文献

本書を執筆するにあたって参考にした文献を項目別に記しておきたい．

微積分，線形代数，ルベーグ積分，位相

[杉浦] 杉浦光夫，解析入門 I, II，東京大学出版会，I (1980), II (1985).

[佐武] 佐武一郎，線形代数学，裳華房，1958.

[伊藤] 伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房，1963.

[新井] 新井仁之，ルベーグ積分講義——ルベーグ積分と面積 0 の不思議な図形たち，日本評論社，2003.

[松坂] 松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店，1968.

超 関 数

[垣田] 垣田高夫，シュワルツ超関数入門［新装版］，日本評論社，1999.

[Sch] L. シュワルツ，超関数の理論 (原書第 3 版) (岩村 聯他訳)，岩波書店，1971.

フーリエ解析，直交多項式，球面調和関数

[R] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis 3rd edition, McGraw-Hill, 1976. (補足の A.5 節も [R] に負う)

[スウ] H.P. スウ，フーリエ解析 (佐藤平八訳)，森北出版，1979.

[大石] 大石進一，フーリエ解析，岩波書店，1989.

[アル] G. アルフケン，特殊関数と積分方程式 (権平健一郎・神原武志・小山直人訳)，講談社，1978.

[犬井] 犬井鉄郎，特殊函数，岩波全書，1962.

[猪狩] 猪狩 惺，実解析入門，岩波書店，1996.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1958.

[F] G. Folland, Real Analysis, Wiley, 1984.

[SS] E.M. スタイン・R. シャカルチ，フーリエ解析入門 (新井仁之訳)，日本評論社，2006.

ウェーブレットとフレーム理論

[**HW**] E. Hernández and G. Weiss, A First Course on Wavelets, CRC Press, 1996.

[**BF**] J. J. ベネデット・M.W. フレージャー，ウェーブレット——理論と応用 (山口昌哉・山田道夫監訳)，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995.

[**Mal**] S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, 1998.

[**M**] Y. Meyer, Wavelets and Operators, Cambridge University Press, 1992.

[**W**] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets, Cambridge University Press, 1997.

[**D**] D.F. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhäuser, 2002.

ヒルベルト空間，線形作用素，スペクトル理論，シュレーディンガー作用素

[**K**] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Corrected Printing for 2nd ed, Springer-Verlag, 1980.

[**Tr**] H. Triebel, Höhere Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1972. (用語ワイル列は [Tr] によった.)

[**RS**] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I – vol. IV, Academic Press, I (1980), II (1975), III (1979), IV (1978).

[**DL**] R. Dautray and J.-L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Sciences and Technology, vol. 3, Springer-Verlag, 1990.

[**吉田**] 吉田耕作，ヒルベルト空間論，共立出版，1953.

[**宮武・加藤**] 宮武 修・加藤祐輔，固有値問題，槇書店，1971.

[**田辺**] 田辺広城，関数解析 上，実教出版，1978.

[**藤田・黒田・伊藤**] 藤田 宏・黒田成俊・伊藤清三，関数解析，岩波書店，1991.

[**増田**] 増田久弥，関数解析，裳華房，1994.

[**宮寺**] 宮寺 功，関数解析，理工学社，1972.

[**新井 (朝)**] 新井朝雄，ヒルベルト空間と量子力学，共立出版，1997.

[**Neu**] J. von ノイマン，量子力学の数学的基礎 (井上 健・広重 徹・恒藤敏彦訳)，みすず書房，1957.

[**小出**] 小出昭一郎，量子力学 I，裳華房，1969.

[**西本**] 西本敏彦，超幾何・合流型超幾何微分方程式，共立出版，1998.

[**黒田**] 黒田成俊，量子物理の数理，岩波講座応用数学，岩波書店，1994.

ソボレフ空間

[**F2**] G. B. Folland, Introduction to Partial Differential Equations 2nd edition, Princeton University Press, 1995.

[Tr2] H. Triebel, Theory of Function Spaces I, II, Birkhäuser, I (1983), II(1992).

その他

[GrG] I. Grattan-Guinness, Joseph Fourier, 1768–1830, The MIT Press, 1972.

[B] U. ボタチーニ，解析学の歴史——オイラーからワイアストラスへ (好田順治訳)，現代数学社，1990.

[パポ] A. パポーリス，アナログとディジタルの信号解析 (第 2 版) (町田東一・村田忠夫訳監修)，現代工学社，1988.

[梅垣] 梅垣壽春，情報数理の基礎 —— 関数解析的展開 ——，サイエンス社，1993.

[酒井] 酒井 隆，リーマン幾何学，裳華房，1992.

[GG] T.W. グレイ・J. グリン，Mathematica 数学の探索 (時田 節・藤村行俊訳)，アジソン ウェスレイ・トッパン，1994.

[ZO] R. L. Zimmerman and F. I. Olness, Mathematica for Physics, Addison-Wesley Publ. Co. 1995.

[J] フリッツ・ジョン，偏微分方程式 (佐々木徹・橋本義武・示野信一訳)，シュプリンガー・フェアラーク東京，2003.

索　　引

記号索引

F

G

H

I, K

L

M, N

P

R

S

T

V

W

X, Y

Z

和文索引

あ 行

か 行

●さ 行

●た 行

●な　行

●は　行

●ま　行

●や　行

●ら　行

●わ

著者略歴

新井 仁之
あらい ひとし

1984年 早稲田大学大学院理工学研究科
修士課程修了
早稲田大学助手，東北大学助手，
講師，助教授，教授を経て
現　在 東京大学大学院数理科学研究科
教授（理学博士）

2010年6月30日　初版発行

新・フーリエ解析と関数解析学

著　者　新井仁之
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03)3262-5256（代表）・振替00140-7-44725

D.T.P. アベリー・平文社印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN978-4-563-01141-3 C3041